外心と傍心、内角の二等分線の関係について

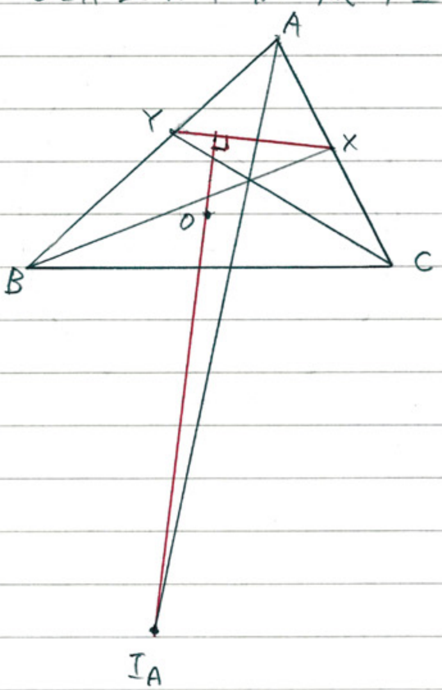
山下真由子

1. はじめに

$\triangle ABC$が与えられたとき、$\angle B$，$\angle C$の二等分線の足を結んだ直線は、初等幾何の問題で頻繁に現れる。しかし、この直線と直線BCのなす角は、$\angle A, \angle B, \angle C$を用いた簡単な形で表すことはできない。私は、この単純だがよく分からない直線の傾きに興味を持った。そこで色々と図を描いていくうちに、この直線は、外心Oと傍心I_Aを結んだ直線OI_Aと垂直なのではないか、という予想が立った。この研究では、この命題を、射影幾何を用いて初等的に示す。

命題1

$\triangle ABC$の$\angle ABC$の二等分線とACの交点をX，$\angle ACB$の二等分線とABの交点をYとする。$\triangle ABC$の外心をO，$\angle BAC$内の傍心をI_Aとする。このとき、$OI_A \perp XY$が成り立つ。



この命題は、$AB=AC$であれば明らかに成り立つので、以下では$AB \neq AC$とする。また、一般性を失うことなく$AB>AC$としてよいので、$AB>AC$とする。

2、準備

証明中に用いる射影幾何の有名事実を挙げる。(無限遠点や退化した場合などの議論は詳しく触れないでおく。)

定義 2.1 A_1, A_2, A_3, A_4 を同一直線上の点とする。

$$(A_1, A_2; A_3, A_4) := \frac{\overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_2A_4}}{\overline{A_2A_3} \cdot \overline{A_1A_4}}$$

を A_1, A_2, A_3, A_4 の複比という。

ただし $\overline{XY}$ で線分 XY の有向長さを表す。

4点 A_1, A_2, A_3, A_4 が $(A_1, A_2; A_3, A_4) = -1$ をみたすとき、調和点列という。

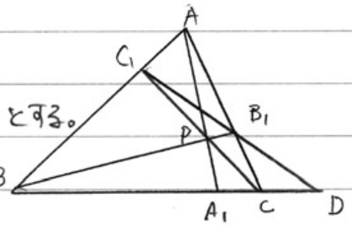
命題 2.2

(1) $\triangle ABC$ とその平面上の点 P に関して、

$AP \cap BC = A_1$, $BP \cap CA = B_1$, $CP \cap AB = C_1$ とする。

$B_1C_1 \cap BC = D$ とすると、

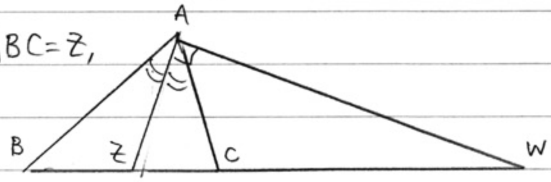
B, C, A_1, D は調和点列をなす。



(2) $\triangle ABC$ において、($\angle BAC$ の二等分線) $\cap BC = Z$、

(A での ZA への垂線) $\cap BC = W$ とすると

B, C, Z, W は調和点列をなす。



(3) 同一直線上の5点 A_1, A_2, A_3, A_4, A_4' に対し

$$(A_1, A_2; A_3, A_4) = (A_1, A_2; A_3, A_4') \Rightarrow A_4 = A_4'$$

定義 2.3 A_1, A_2, A_3, A_4 をこの順に同一円周上にある点とする。

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} \cdot \frac{A_3A_4}{A_4A_1} = 1$$

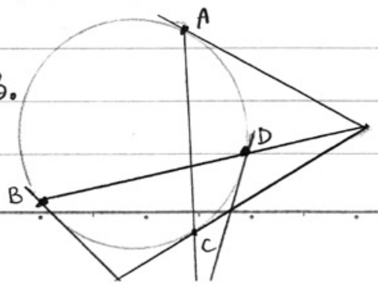
をみたすとき、四角形 $A_1A_2A_3A_4$ を調和四角形という。

命題 2.4 円に内接する凸四角形 $ABCD$ に関して、次は同値である。

(1) $ABCD$ は調和四角形である。

(2) A での接線, C での接線, BD が1点で交わる。

(3) B での接線, D での接線, AC が1点で交わる。



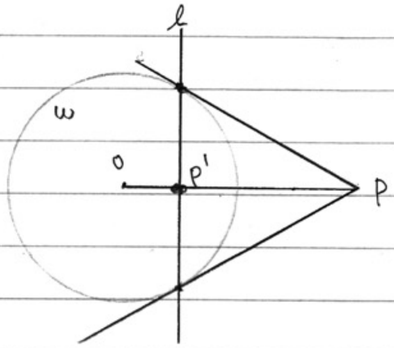
定理2.5 (Pascalの定理)

2次曲線 C 上に 6点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ があるとき、

$P_1 = A_1A_2 \cap A_4A_5$, $P_2 = A_2A_3 \cap A_5A_6$, $P_3 = A_3A_4 \cap A_6A_1$

とすると、3点 P_1, P_2, P_3 は同一直線上にある。

定義 2.6



半径r, 中心Oの円ωとその平面上の点Pに対し

P'を $OP' \cdot OP = r^2$ をみたす半直線OP上の点とし、

P'を通りOPに垂直な直線をℓとする。

Pをℓの**極**, ℓをPの**極線**という。

命題 2.7

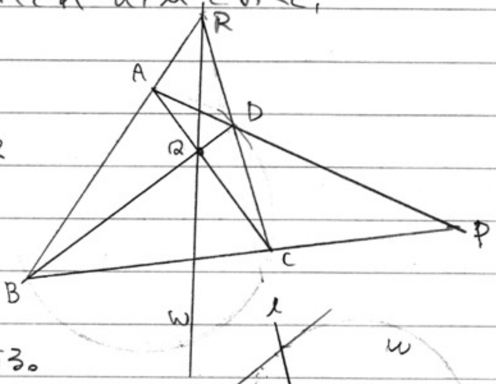
(1) 円ωに関して、点A, Bの極線をそれぞれ a, b とおくと、

$A \in b \iff B \in a$

(2) 円ωに内接する四角形$ABCD$について、

$AD \cap BC = P$, $AC \cap BD = Q$, $AB \cap CD = R$

とする。このとき PはQRの極である。

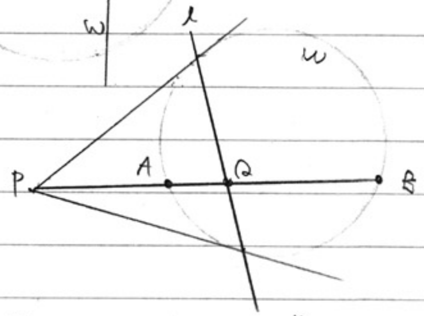


(3) 円ωにおいて点Pの極線をℓとし、

Pから円ωと交わる直線をひいて

ωとの交点をA, B, ℓとの交点をQとする。

このとき P, Q, A, Bは調和点列をなす。



定理 2.8 (Mongeの定理)

平面上に円 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ があり、

ω_1とω_2, ω_2とω_3, ω_3とω_1 の正の相似拡大の中心をそれぞれ P, Q, Rとおく。

このとき P, Q, Rは同一直線上にある。

3. 命題1の証明

3.1 方針

実は、次の命題が成り立つ。

命題1'

A, B, C, X, Y を命題1と同様にとる。$\triangle ABC$ の外接円を Γ_1、I_A 中心の傍接円を Γ_2 とする。Γ_1 と Γ_2 の2本の共通外接線と Γ_1 との接点を U, V とすると、U, V, X, Y は同一直線上にある。

$UV \perp OI_A$ であるから、命題1'から命題1が従う。
そこで、以下では命題1'を示すことを目標とする。
$BX \cap \Gamma_1 = P$, $CY \cap \Gamma_1 = Q$, Γ_1 の弧 $\overset{\frown}{BAC}$ の中点 $= M$
$PQ \cap (A$ での Γ_1 の接線$) = K$, $MA \cap BC = D$ とする。
「UV, XY はともに K, D を通る」ということを示せば十分である。
（$AB \neq AC$ を仮定しているので $A \neq M$ であり、AM は A での Γ_1 での接線と一致せず、$K \neq D$ だからである。）

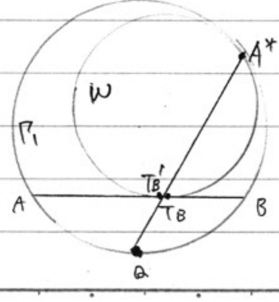
以下、これを示していく。

3.2 UV, XY がともに K を通ることの証明（P8 図1）

Pascal の定理（定理2.5）を退化した六角形 $BAACQP$ に適用すれば、
$BA \cap CQ = Y$, $AA \cap QP = K$, $AC \cap PB = X$ より XY は K を通る。
AB, AC に接し、円 Γ_1 に内接する円を w とし、w と Γ_1 の接点を A^*、w と AB, AC との接点をそれぞれ T_B, T_C とする。

補題3.2.1

A^*, T_B, Q は同一直線上にある。



証明　ω と A^*Q の A^* と異なる交点を T_B' とおく。

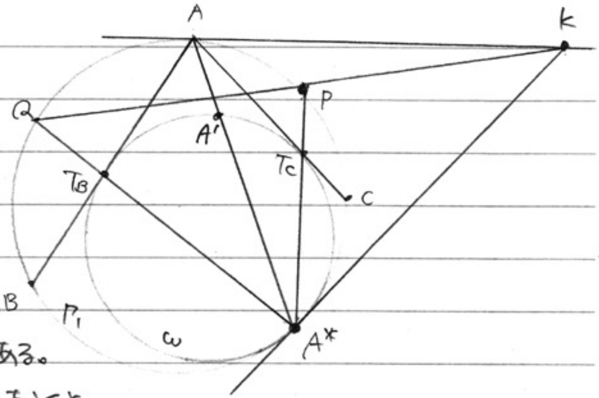
A^* は ω と Γ_1 の相似の中心である。この相似で T_B' と Q は対応する。

Q は $\overset{\frown}{AB}$ の中点なので、(Q での Γ_1 の接線) $\parallel AB$ である。

よって、(T_B' での Γ_1 の接線) $\parallel AB$ である。つまり、$T_B = T_B'$ である。□

補題 3.2.2

A^* での Γ_1 の接線は K を通る。



証明

補題1より、Q, T_B, A^* が同一直線上にあり、

同様にして P, T_C, A^* も同一直線上にある。

AA^* と ω との A^* と異なる交点を A' とおくと、

点 A と円 ω に注目すると、$A'T_BA^*T_C$ は調和四角形である。(命題 2.4)

A^* を中心とする ω から Γ_1 への相似拡大により、$A'T_BA^*T_C$ は AQA^*P にうつる。

したがって AQA^*P は調和四角形である。

よって A での Γ_1 の接線, A^* での Γ_1 の接線, PQ は1点 K で交わる。(命題2.4)□

S を Γ_1 と Γ_2 の共通外接線の交点とする。(交わらない場合は無限遠点と考える。)

A^*：ω と Γ_1 の正の相似拡大の中心

A：ω と Γ_2 の正の相似拡大の中心

S：Γ_1 と Γ_2 の正の相似拡大の中心

よって、Monge の定理 (定理 2.8) より、A^*, A, S は同一直線上にある。

点 S と円 Γ_1 に注目すると、AUA^*V は調和四角形である。(命題 2.4)

よって UV は A, A^* での Γ_1 の接線の交点 K (補題 3.2.2より) を通る。(命題2.4)

よって示せた。

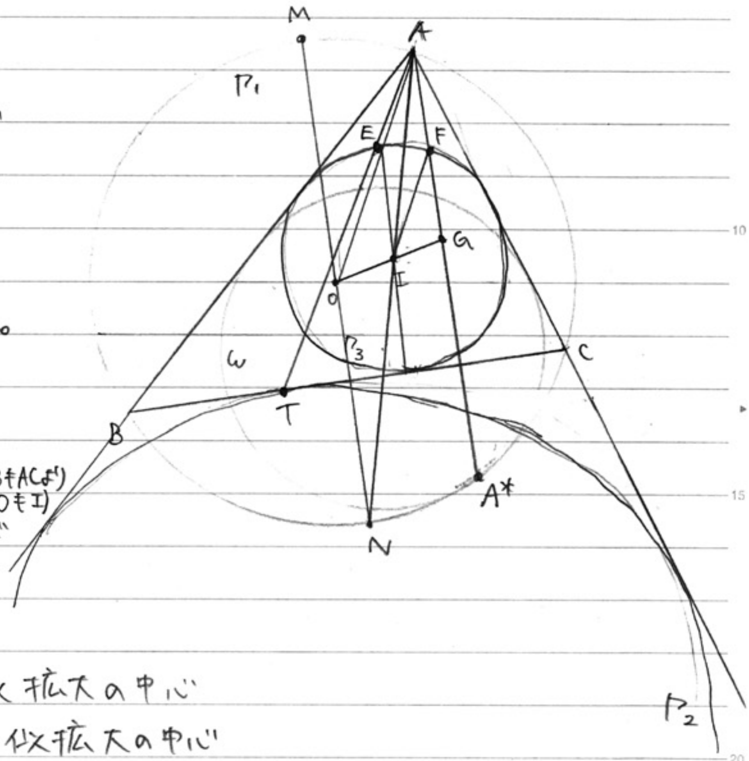
3.3 UV, XYがともにDを通ることの証明(P8.図2)

$XY \cap BC = D'$, $\triangle ABC$の内心$=I$, $AI \cap BC = Z$ とする。

$\triangle ABC$と点Iに対して命題2.2 (1)を適用し、B, C, Z, D'は調和点列である。

一方、$\angle MAZ = 90^\circ$, $\angle BAZ = \angle CAZ$ より 命題2.2 (2) より B, C, Z, Dも調和点列である。

したがって、命題2.2 (3) より $D = D'$ よって XYはDを通る。…Ⓐ



補題3.3.1

BCとΓ_2の接点をTとおくと、

$\angle BAT = \angle CAA^*$

証明 Γ_3を$\triangle ABC$の内接円とする。

$AT \cap \Gamma_3 = E$ (Aに近い方)

$AA^* \cap \Gamma_3 = F$ (Aに近い方)

$OI \cap AA^* = G$ とおく。($AB \neq AC$より $O \neq I$)

AはΓ_3とΓ_2の相似の中心でEとTが対応するので、(EでのΓ_3の接線)$\parallel BC$

よって $EI \perp BC$ …①

また、A: Γ_3とωの正の相似拡大の中心

A^*: ωとΓ_1の正の相似拡大の中心

よって、Mongeの定理より、Γ_1とΓ_3の正の相似拡大の中心G'はAA^*上にある。

また、G'はOI上でもあるので、$G = G'$

したがってGはΓ_1とΓ_3の正の相似拡大の中心で、OとI, AとFがそれぞれ対応する。

よって、$AO \parallel FI$ …②

$OM \perp BC$より、①より、$EI \parallel MO$ これと②より $\angle FIE = \angle AOM$

一方、$\angle FIA = \angle OAI$ (②より)

$AI \cap \Gamma_1 = N$ ($\neq A$) とおくと、M, O, Nは一直線上にあり、

$\angle AOM = \angle OAN + \angle ONA = 2\angle OAI$

したがって、$\angle FIE = \angle AOM = 2\angle OAI = 2\angle FIA$.

よって $\angle EIA = \angle FIA$

また、$IE = IF$（$= \Gamma_3$の半径）

$AI = AI$

よって2辺夾角相等で$\triangle AEI \equiv \triangle AFI$

よって$\angle EAI = \angle FAI$. $\angle BAI = \angle CAI$より、$\angle BAT = \angle CAA^*$ □

$L = SI_A \cap UV$とおく。

$\angle SLV = \angle SVO = 90°$、$S, L, O$は一直線上にあるので$SL \cdot SO = SV^2$

一方、方べきの定理より、$SA \cdot SA^* = SV^2$

よって$SL \cdot SO = SA \cdot SA^*$ 方べきの定理の逆より、A, L, O, A^*は同一円周上にある。 …③

$\angle ATC = \angle BAT + \angle ABT = \angle ABC + \angle CAA^*$（補題3.3.1より）

$= \angle ABA^* = \frac{1}{2}\angle AOA^*$

③より、$\angle ALS = \angle AA^*O = 90° - \frac{\angle AOA^*}{2} = 90° - \angle ATC$

$\angle ALI_A = 180° - \angle ALS = 180° - (90° - \angle ATC) = 90° + \angle ATC$

$\angle ATI_A = \angle ATC + 90°$

$\therefore \angle ALI_A = \angle ATI_A$ よって A, L, T, I_Aは同一円周上にある。

一方、$\angle I_ATD = 90°$, $\angle I_AAD = 90°$なのでI_A, T, A, Dは同一円周上にある。

したがって、A, L, T, I_A, Dは同一円周上にあり、

$\angle DLI_A = \angle DTI_A = 90°$

よって、直線DLと直線UVは一致する。つまり、UVはDを通る。

3.2と3.3をあわせて、命題1'が示された。

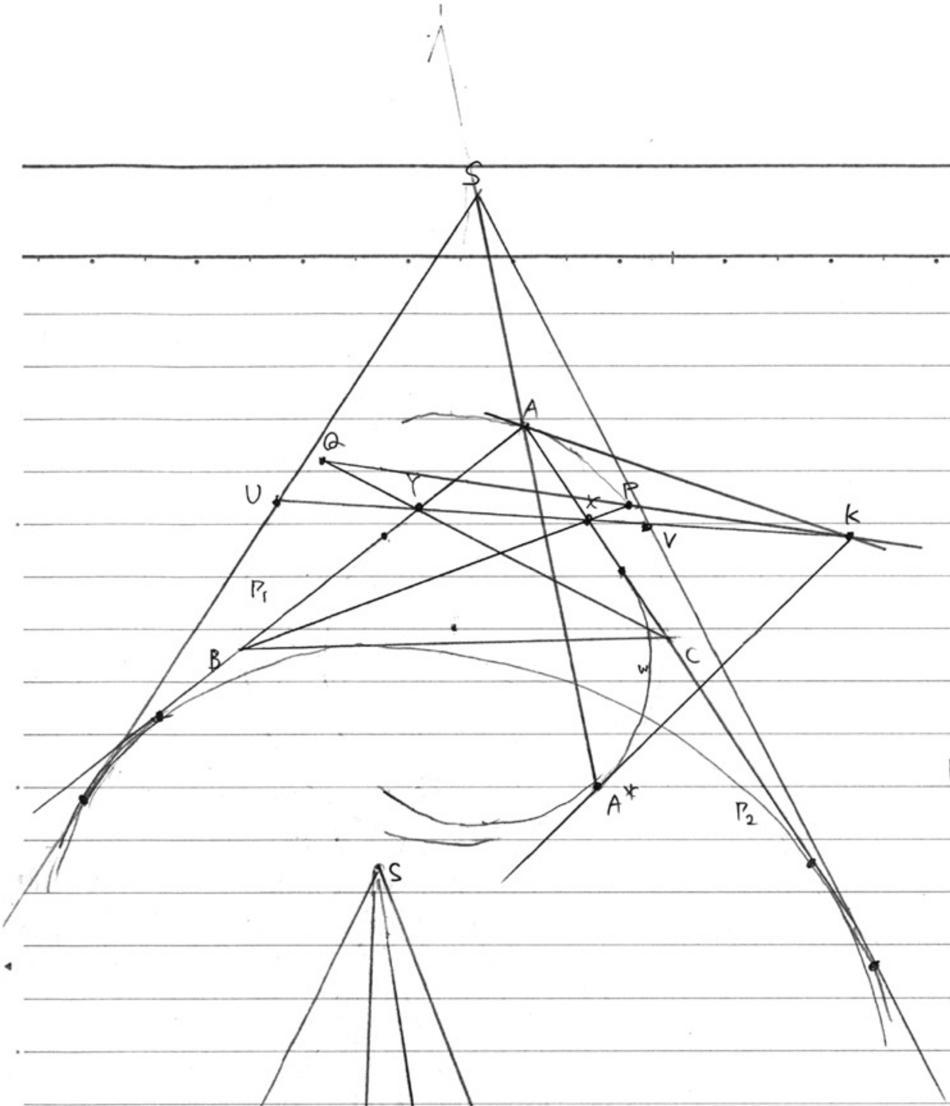


図 1

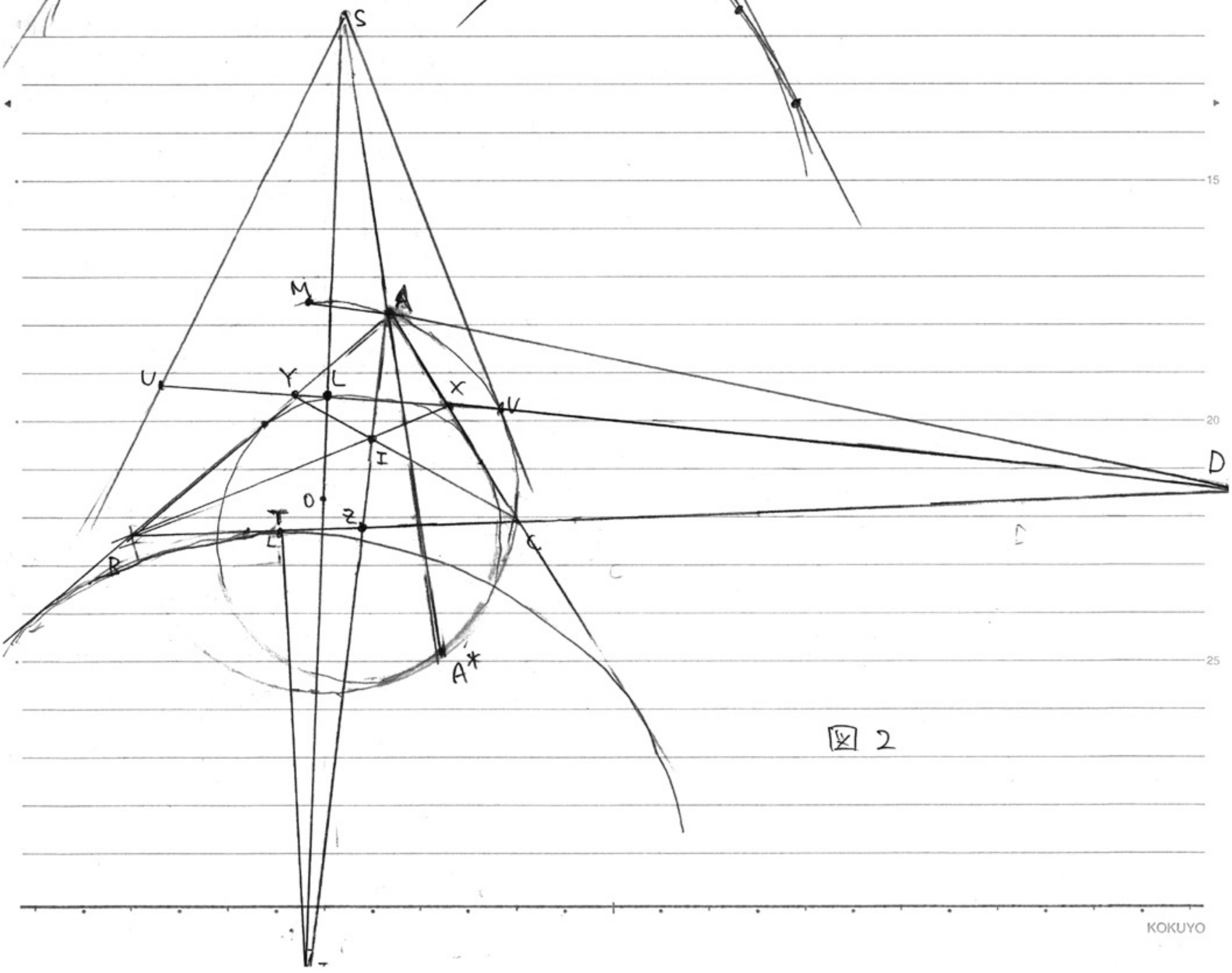
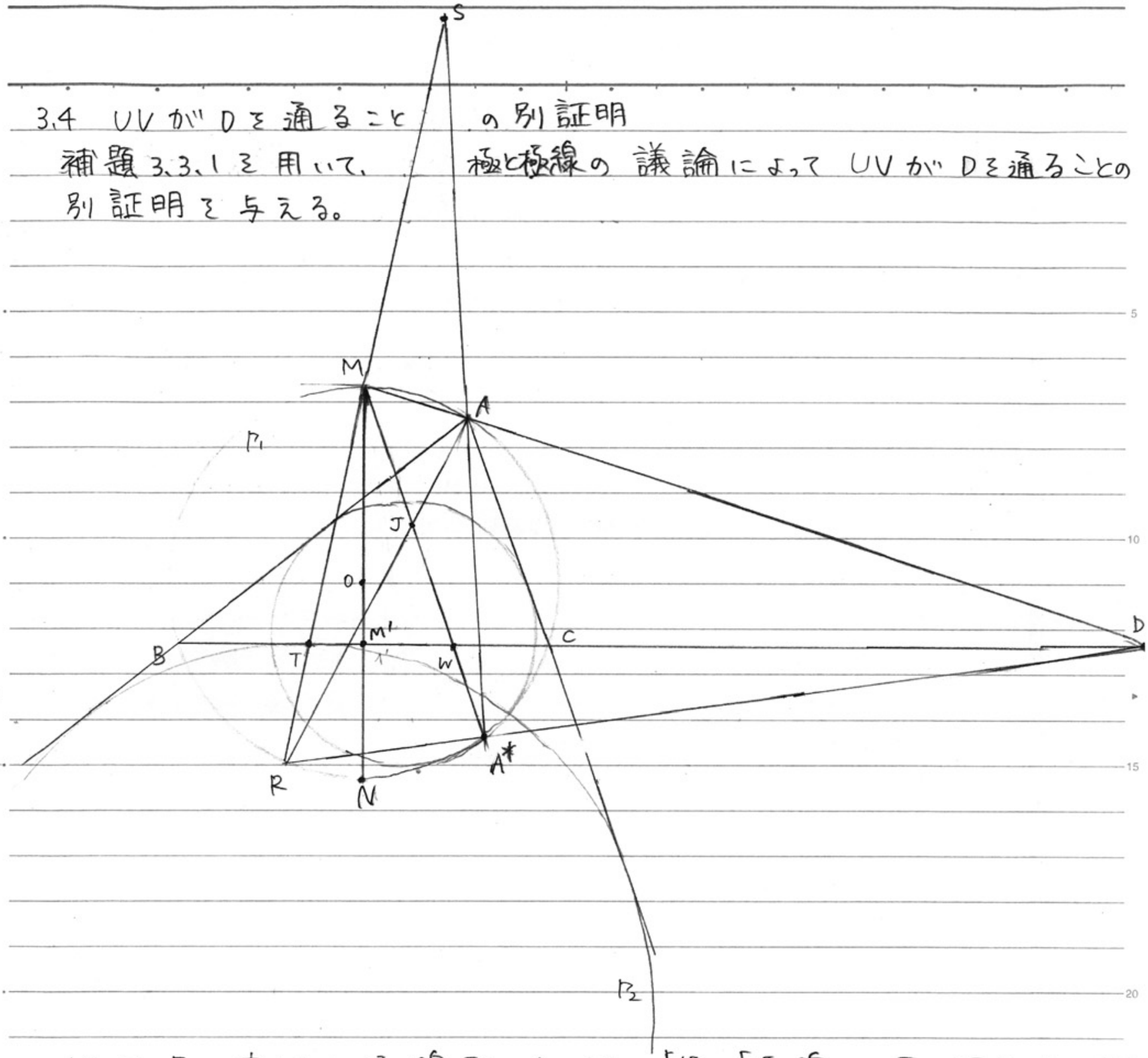


図 2

3.4 UVがDを通ることの別証明

補題3.3.1を用いて、極と極線の議論によってUVがDを通ることの別証明を与える。



UVはΓ_1に関するSの極線なので、（以下「極」・「極線」はΓ_1に関するものとする）

UVがDを通る ⇔ Dの極線がSを通る（命題2.7）

よってDの極線がSを通ることを示せばよい。

SはΓ_1とΓ_2の相似の中心であり、

(MでのΓ_1の接線) // BC より、MはTと対応するので、S, M, Tは一直線上にある。

$MT \cap \Gamma_1 = R\,(\neq M)$, $MA^* \cap AR = J$, $MA^* \cap BC = W$ とおく。

$MO \cap BC = M'$ とおく。

$\angle ATW = \angle BAT + \angle ABC = \angle CAA^* + \angle ABC$ （補題3.3.1）
$= \angle ARA^*$
$= \angle AMA^* = \angle AMW$

よって A, M, T, W は同一円周上にある。この円を ω_1 とする。
MN は Γ_1 の直径なので、$\angle TRN = \angle WA^*N = 90°$ また、$\angle TM'N = \angle WM'N = 90°$
よって TRNM', WA*NM' はそれぞれ円に内接し、
方べきの定理より $MT \cdot MR = MM' \cdot MN = MW \cdot MA^*$
よって方べきの定理の逆より T, R, A^*, W は同一円周上にある。この円を ω_2 とする。
Γ_1 と ω_1 の根軸 AM は D を通り、ω_1 と ω_2 の根軸 TW も D を通る。
よって $\omega_1, \Gamma_1, \omega_2$ の根心は D となり、ω_1 と ω_2 の根軸は D を通る。
よって R, A^*, D は同一直線上にある。
したがって、命題2.7(2)より、SJ は D の極線である。よって示せた。

4 おわりに

外心、傍心、内角の二等分線の足という、非常に単純な構図でありながら、証明は一筋縄では行かず、結構苦労した。初等幾何の色々な手法が組み合わさって証明が出来上がった時には、初等幾何の美しさが感じられた。

この証明に出てくる円 ω は △ABC の A-mixtilinear incircle という名前がついていて、色々な性質が知られている。それらを使えば、より簡単な証明が見つかるかも知れないので、考えてみたい。