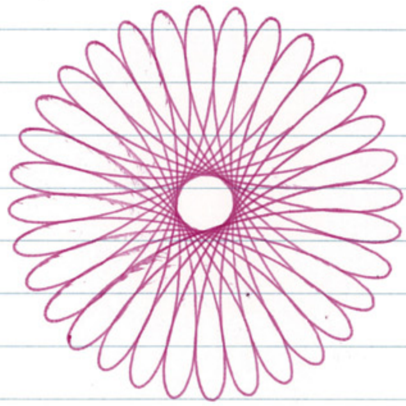
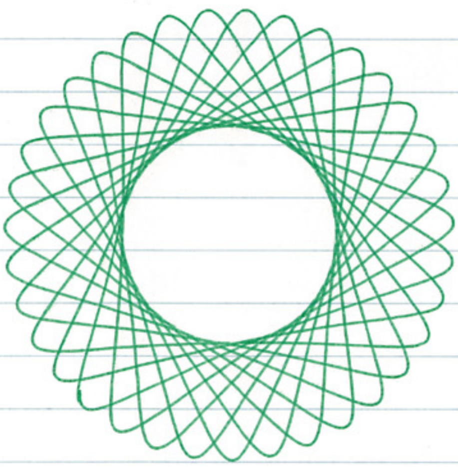
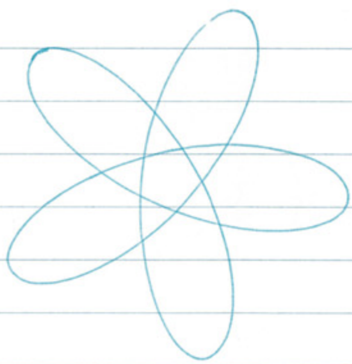
「デザイン定規」&「ローリングルーラー」は、なぜ美しい図形が描けるのか？







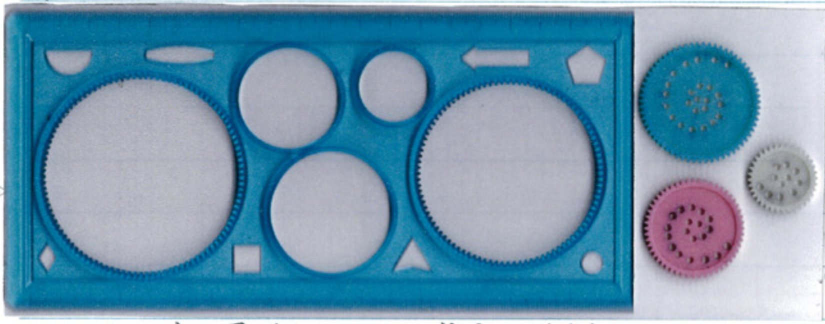
東京学芸大学附属世田谷中学校
大村　美葵

1、研究動機、目的

夏休みに入り、自由研究のテーマ何にしよう…と考えながら100円ショップをうろうろしていたとき、歯車の穴に鉛筆を通してぐるぐる回すだけで不思議な模様が描ける定規を見つけた。私はそれを見て、小さい頃にこれでよく遊んだことを思い出したと同時に、鉛筆を通す歯車の穴の位置や歯車の大きさを変えただけで、どうして模様が大きく変わるんだろう?と疑問に思った。そこで、それを数学の力を活用して探求し、この疑問を解決してみようと思った。

2、研究方法、内容

デザイン定規(レモン株式会社製)やローリングルーラー(アベトイズ株式会社製)、ノギスを購入し、いろいろな模様を描いてみる。そして、なぜこのような形の図形になるのか、定規のギアと歯車の歯数や半径、歯車の穴の数や位置などの数値を用いて、そのメカニズムを探る。



デザイン定規(レモン株式会社製)

ローリングルーラー(アベトイズ株式会社製)

3、研究結果

まずは研究の材料となる数値を得るため、デザイン定規の、定規のギアと歯車の歯数や半径、歯車の穴の数や位置などを調べる。

◎定規のギアと歯車の歯数(個)

ギア大→105　ギア小→96　歯車大→63　歯車中→52　歯車小→36

◎定規のギアと歯車の半径(mm)　※ノギスで計測した。

ギア大→33.7　ギア小→31.0　歯車大→20.45　歯車中→16.8　歯車小→11.75

◎歯車の穴の数(個)

歯車大→24　歯車中→19　歯車小→11

◎歯車の穴の位置

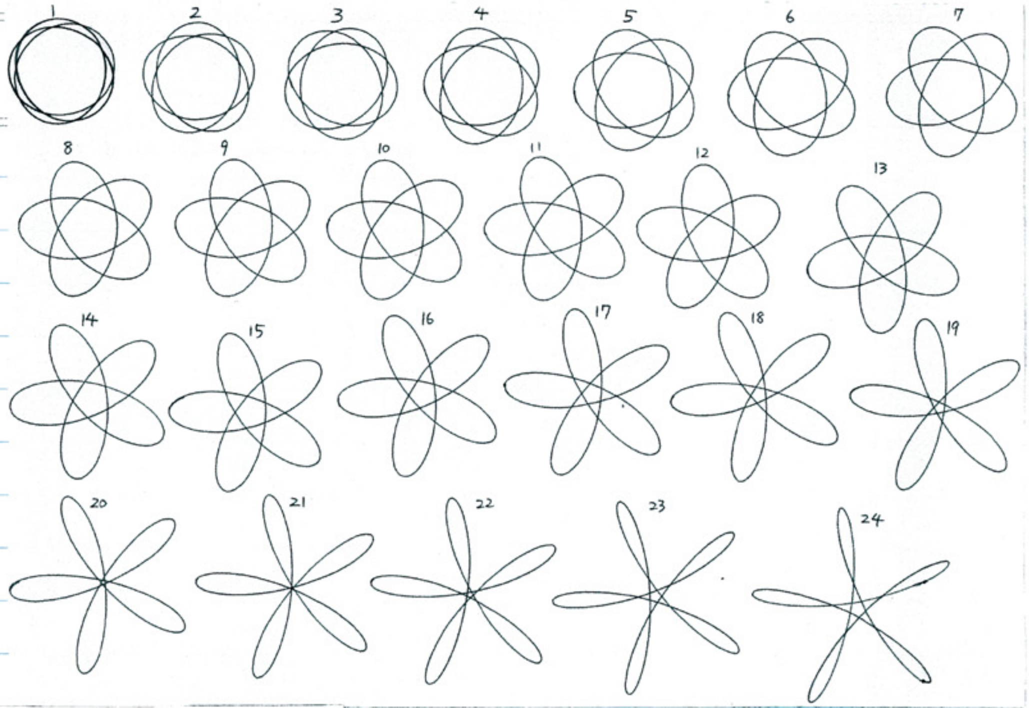
内側から順に1、2、3、…とする。

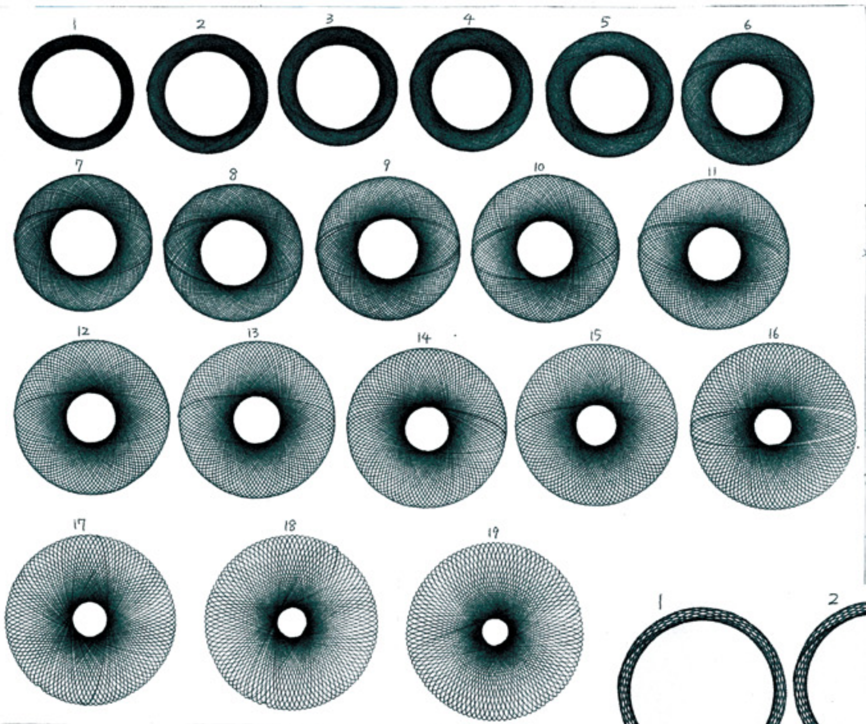
次に、全パターンの組み合わせで、図形を描いてみる。

NO. 2

DATE

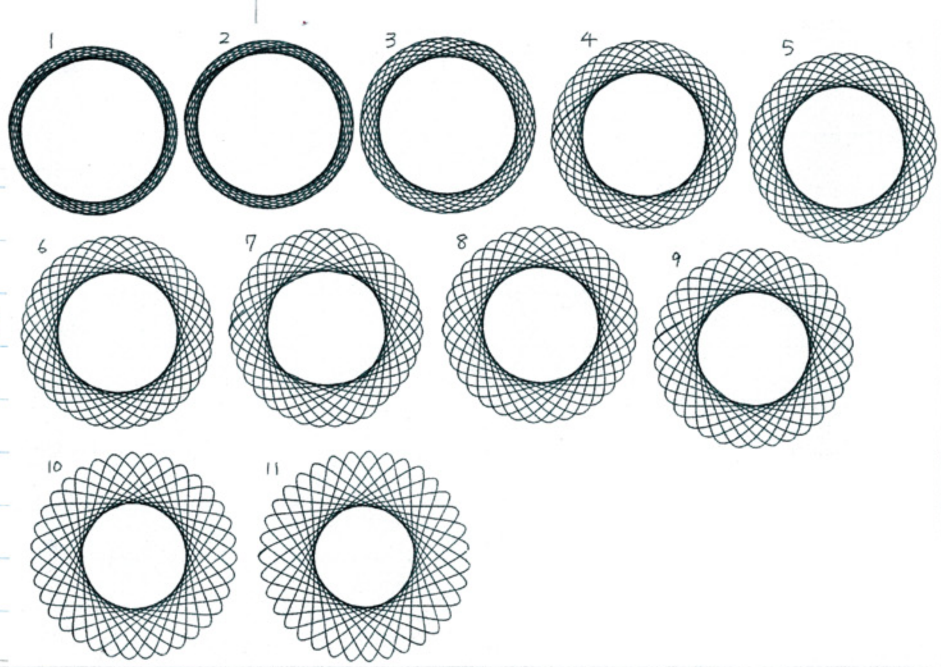
A ギア大・歯車大 →





← B ギア大・歯車中

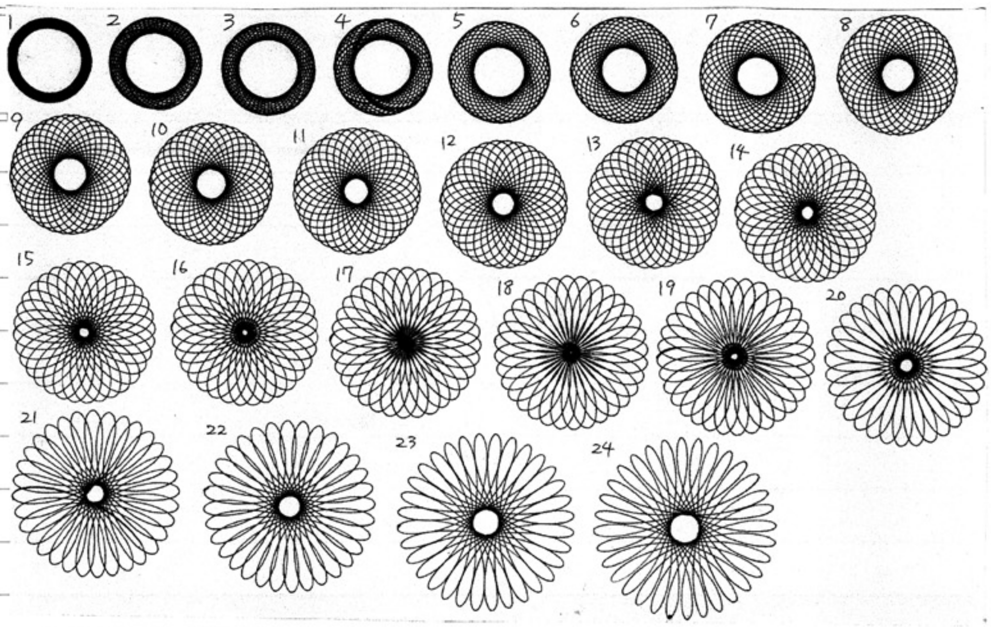
C ギア大・歯車小 →

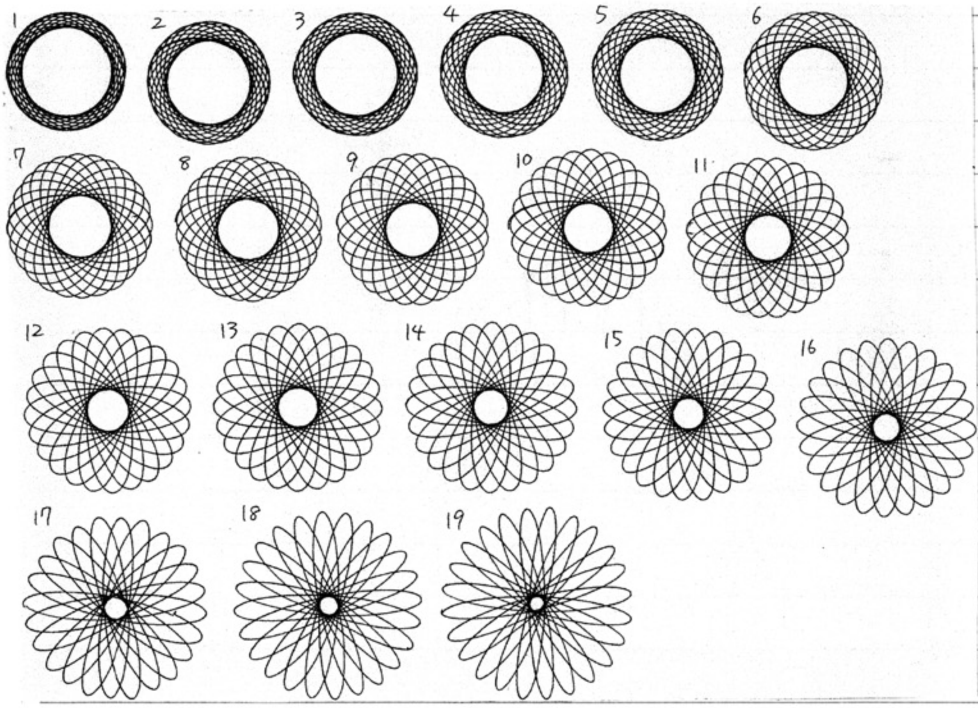


NO. 3

DATE

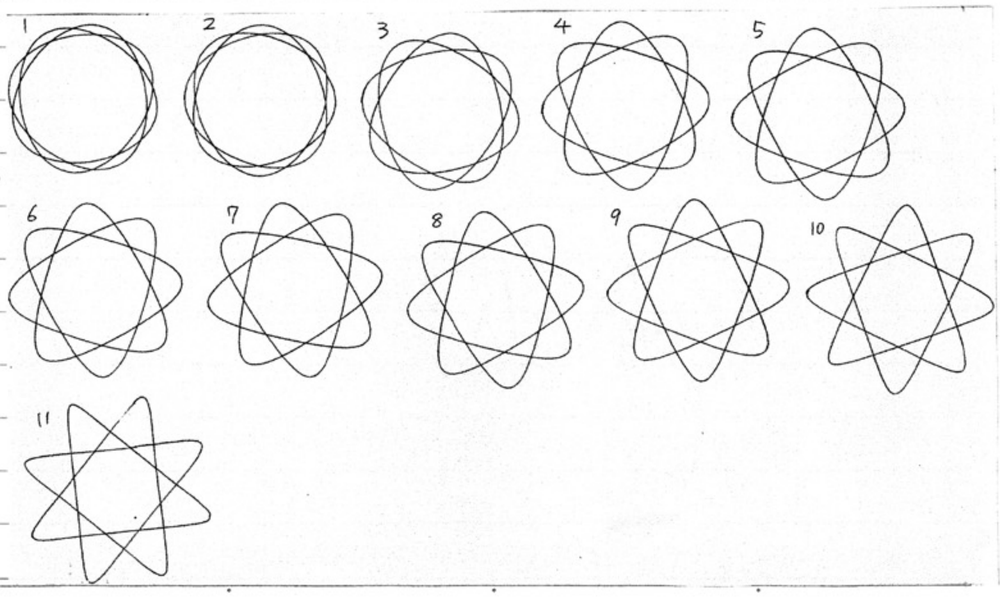
D ギア小・歯車大 →





← E ギア小・歯車中

F ギア小・歯車小 →



4、考察

(1) 考察1

◎ギアと歯車の歯数について

①ギア大との組み合わせ(表1)

	ギア大	歯車大	歯車中	歯車小
歯数(個)	105	63	52	36
ギア大の個数を1としたときの比	1	: 0.6	: 0.495~~2~~…	: 0.34~~2~~38…

②ギア小との組み合わせ(表2)

	ギア大	歯車大	歯車中	歯車小
歯数(個)	96	63	52	36
ギア小の個数を1としたときの比	1	: 0.656	: 0.542	: 0.375

ギアと歯車の歯はきちんとかみ合うように作られているので、つまり $\boxed{\text{歯数の比} \fallingdotseq \text{円周の比}}$ となるはずである。ここで≒としたのは、歯車が滑らかに動くためには、寸法にわずかなあそびがあり、理論上の計算とわずかな誤差が生じると考えたからである。

ここで、円周$=2\pi r$より、$r=\dfrac{\text{円周}}{2\pi}$ となるので、

ギアと歯車の半径を用いて、歯数から算出した比と同じになるか調べてみる。

◎ギアと歯車の半径(r)について

①ギア大との組み合わせ(表3)

	ギア大	歯車大	歯車中	歯車小
半径(mm)	33.7	20.45	16.8	11.75
ギア大の半径を1としたときの比	1	: 0.60~~88~~1…	: 0.49~~85~~9…	: 0.34~~88~~9…

②ギア小との組み合わせ(表4)

	ギア小	歯車大	歯車中	歯車小
半径(mm)	31.0	20.45	16.8	11.75
ギア小の半径を1としたときの比	1	: 0.653~~2~~…	: 0.54~~19~~2…	: 0.379~~0~~…

表1と表3、表2と表4を比較すると、$\boxed{\text{歯数の比} \fallingdotseq \text{半径の比}}$ であるといえる。

(2) 考察2　実際に図形を描いてみて分かったこと

①花びらの数が、それぞれのギアと歯車の組み合わせで決まっている

鉛筆を入れる穴の位置が内側から外側へ(1,2,…)と変わると、その軌跡は除々に大きくなり、中央部分の何も描かれていない空白部分が除々に小さくなる。花びらの形も、それにつれて大きくきれいに描かれるようになる。しかし花びらの数は穴の位置とは関係なく、ギアと歯車の組み合わせごとに一定である。なぜこのようになるのか、ギアと歯車の歯数について調べ、考えた。

ギアと歯車の歯数の関係(1)　(表5)

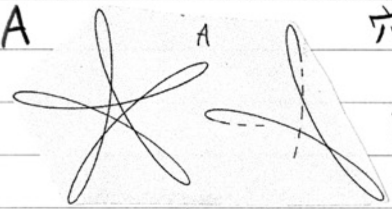
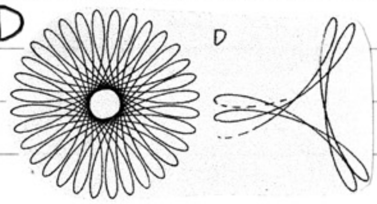
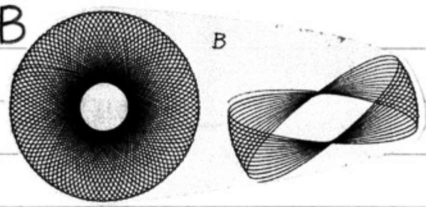
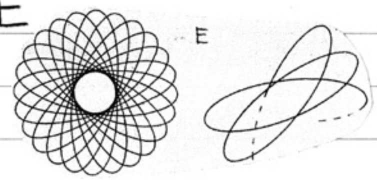
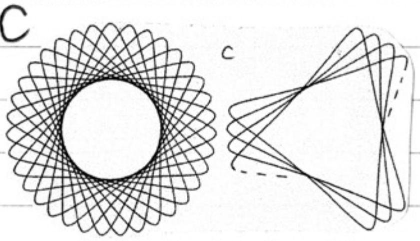
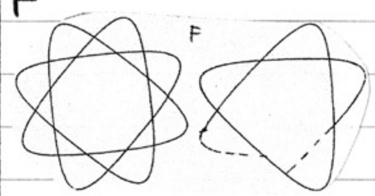
	ギア大(105)	ギア小(96)
歯車大(63)	A　63=3×3×7 105=3×5×7 最小公倍数=3×3×5×7=315 歯車大の自転回数=315÷63=5 公転回数=315÷105=3 歯車大の自転回数÷公転回数 =5÷3=1.66…	D　96=2×2×2×2×2×3 63=3×3×7 最小公倍数=2×2×2×2×2×3×3×7=2016 歯車大の自転回数=2016÷63=32 公転回数=2016÷96=21 歯車大の自転回数÷公転回数 =32÷21=1.52…
歯車中(52)	B　52=2×2×13 105=3×5×7 最小公倍数=2×2×3×5×7×13 =5460 歯車中の自転回数=5460÷52=105 公転回数=5460÷105=52 歯車中の自転回数÷公転回数 =105÷52=2.01…	E　52=2×2×13 96=2×2×2×2×2×3 最小公倍数=2×2×2×2×2×3×13 =1248 歯車中の自転回数=1248÷52=24 公転回数=1248÷96=13 歯車中の自転回数÷公転回数 =24÷13=1.84…
歯車小(36)	C　36=2×2×3×3 105=3×5×7 最小公倍数=2×2×3×3×5×7 =1260 歯車小の自転回数=1260÷36=35 公転回数=1260÷105=12 歯車小の自転回数÷公転回数 =35÷12=2.91…	F　96=2×2×2×2×2×3 36=2×2×3×3 最小公倍数=2×2×2×2×2×3×3 =288 歯車小の自転回数=288÷36=8 公転回数=288÷96=3 歯車小の自転回数÷公転回数 =8÷3=2.66…

表5と1ページ後に記してある表6より、$\boxed{\text{花びらの数＝歯車の自転回数}}$であると分かった。

②描き始めた点に再び鉛筆が戻ってきて、1つの閉じた図形ができ上がるまでに、ギアの中を歯車が何周回転したのか

　これは、それぞれのギアと歯車の組み合わせごとに一定である。鉛筆を穴に差し込み、歯車をぐるぐる回転させるとき、その回数を「1、2、3、…」と数えながら描くと、1つのギアー歯車の組み合わせごとに決まった回数で描き終わる。なぜこのようになるのか、ギアと歯車の歯数から考えた。

ギアと歯車の歯数の関係(2)　(表6)

	ギア大(105)	ギア小(96)
歯車大(63)	A  穴24で作図 花びら5枚 ギアを3回転 花びら÷公転回数=5÷3=1.66… (花びら÷公転回数とは、1回の公転で花びらが何枚描けるかを表したものである。)	D  穴24で作図 花びら32枚 ギアを21回転 花びら÷公転回数=32÷21=1.52… (花びら÷公転回数とは、1回の公転で花びらが何枚描けるかを表したものである。)
歯車中(52)	B  穴15で作図 花びら105枚 ギアを52回転 花びら÷公転回数=105÷32=2.01… (花びら÷公転回数とは、1回の公転で花びらが何枚描けるかを表したものである。)	E  穴12で作図 花びら24枚 ギアを13回転 花びら÷公転回数=24÷13=1.84… (花びら÷公転回数とは、1回の公転で花びらが何枚描けるかを表したものである。)
歯車小(36)	C  穴11で作図 花びら35枚 ギアを12回転 花びら÷公転回数=35÷12=2.91… (花びら÷公転回数とは、1回の公転で花びらが何枚描けるかを表したものである。)	F  穴8で作図 花びら8枚 ギアを3回転 花びら÷公転回数=8÷3=2.66… (花びら÷公転回数とは、1回の公転で花びらが何枚描けるかを表したものである。)

1つ前のページに記してある表5と表6より、ギアを何周回転すれば図形ができるかは、ギアと歯車の公転回数で決まると分かった。

5、応用

3、で述べたように、私は今回の研究のために、定規のギアと歯車のセットを2種類購入した。今まで使用してきた物はデザイン定規（レモン株式会社製）だが、これとはサイズの異なるローリングルーラー（アベトイズ株式会社製）も、同じ原理できれいな図形が描ける。私はここで、実際に鉛筆を穴に入れてぐるぐる回して描く前に、今まで述べた歯数を使った計算で求める方法によって、その図形のおよその形を考える。

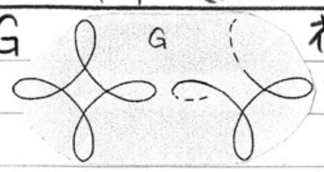
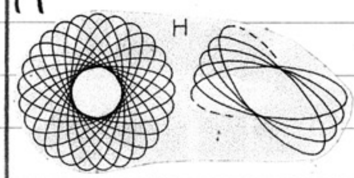
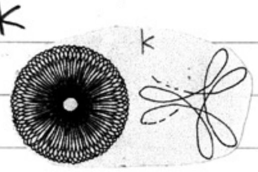
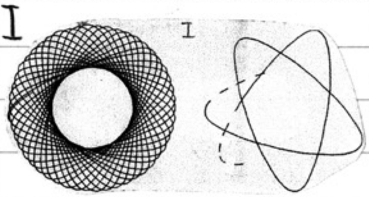
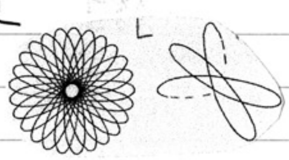
①まず、ギア大・小、歯車大・中・小の歯数を数える。②次に、それぞれのギアと歯車の組み合わせごとに最小公倍数を算出する。③考察2より（花びらの数）=（歯車の自転回数）なので、（最小公倍数）÷（歯車の歯数）=（歯車の自転回数）=（花びらの数）を算出する。④（最小公倍数）÷（ギアの歯数）=（公転回数）を算出する。⑤（花びらの数）÷（公転回数）で、おおよその形を考える。

「ローリングルーラー」のギアと歯車の歯数（1）　（表7）

	ギア大（100）	ギア小（75）
歯車大（75）	G 100=2×2×5×5 75=3×5×5 最小公倍数=2×2×3×5×5=300 300÷75=4（花びら4枚） 300÷100=3（公転回数3回） （花びらの数）÷（公転回数） =4÷3=1.33…	J （ギアと歯車の歯数が同じなので歯車は回らず、図形はできない。）
歯車中（52）	H 100=2×2×5×5 52=2×2×13 最小公倍数=2×2×5×5×13=1300 1300÷52=25（花びら25枚） 1300÷100=13（公転回数13回） （花びらの数）÷（公転回数） =25÷13=1.92…	K 75=3×5×5 52=2×2×13 最小公倍数=2×2×3×5×5×13=3900 3900÷52=75（花びら75枚） 3900÷75=52（公転回数52回） （花びらの数）÷（公転回数） =75÷52=1.44…
歯車小（42）	I 100=2×2×5×5 42=2×3×7 最小公倍数=2×2×3×5×5×7=2100 2100÷42=50（花びら50枚） 2100÷100=21（公転回数21回） （花びらの数）÷（公転回数） =50÷21=2.38…	L 75=3×5×5 42=2×3×7 最小公倍数=2×3×5×5×7=1050 1050÷42=25（花びら25枚） 1050÷75=14（公転回数14回） （花びらの数）÷（公転回数） =25÷14=1.78…

表7を元に、図形を考える。

「ローリングルーラー」のギアと歯車の関係(2)　　(表8)

	ギア大(100)	ギア小(75)
歯車大(75)	G  花びら÷公転回数 =4÷3=1.33… $\boxed{1.33\cdots<1.5}$ 外側に向かってループを描くような軌道をくり返す(外側ループ型)。	J (ギアと歯車の歯数が同じなので歯車は回らず、図形はできない。)
歯車中(52)	H  花びら÷公転回数 =25÷13=1.92… $\boxed{1.5<1.92\cdots<2}$ 花びらの数が公転回数のおよそ2倍なので、1回の公転で細長いだ円軌道で花びらを2枚描く(だ円型)。	K  花びら÷公転回数 =75÷52=1.44… $\boxed{1.44\cdots<1.5}$ 外側に向かってループを描くような軌道を複雑にくり返し、菊の花のような複雑な図形になる(外側ループ型)。
歯車小(42)	I  花びら÷公転回数 =50÷21=2.38… $\boxed{2<2.38\cdots<3}$ 1回の公転で、角の丸い三角形に近い形を描きつつ、三角形が閉じることなく図形が連続する(三角おにぎり型)。	L  花びら÷公転回数 =25÷14=1.78… $\boxed{1.5<1.78\cdots<2}$ 細長いだ円軌道をくり返す(だ円型)。

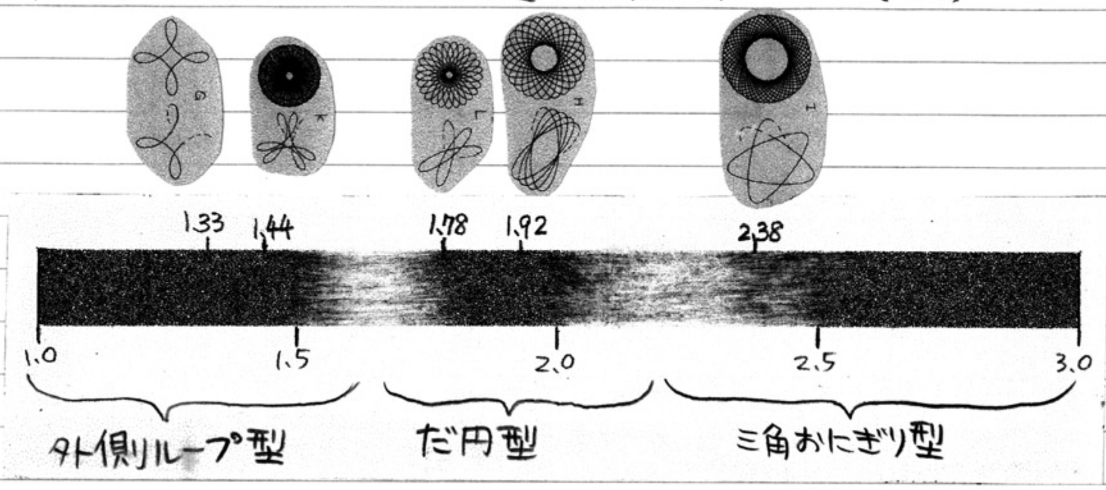
G、Kを見てみると、両者とも(花びらの数)÷(公転回数)が1.5よりも小さい値になっており、外側に向かってループを描くような軌道をくり返している。このことから、(花びらの数)÷(公転回数)が1.5より小さいとき、図形は外側ループ型に近い形になると考えた。

H、Lを見てみると、両者とも(花びらの数)÷(公転回数)が1.5よりも大きい値になっており、細長いだ円軌道をくり返している。また、両者とも花びらの数が公転回数のおよそ2倍なので、1回の公転で花びらを2枚描いている。このことから、(花びらの数)÷(公転回数)が1.5より大きく2より小さいとき、図形はだ円形に近い形になると考えた。

Iを見てみると、(花びらの数)÷(公転回数)が2より大きく3より小さくなっている。また、1回の公転で花びらを3枚描けているということは、1回の公転で角の丸い三角形に近い形を描けているということになる。このことより、(花びらの数)÷(公転回数)が2より大きく3より小さいとき、図形は三角おにぎり型に近い形になると考えた。

軌道のパターンの特徴から、「外側ループ型」、「だ円型」、「三角おにぎり型」と仮に名付けるとすると、それらは境目があいまいで数直線では表しにくい。よって、グレースケールを用いると下のようになる。

(花びらの数)÷(公転回数)の値と、軌道の型の関係　(図1)



6、感想・今後の課題

幼児が遊ぶような単純なしくみのおもちゃだと思っていたデザイン定規・ローリングルーラーだったが、閉じた美しい図形を描くために、円周$=2\pi r$などの数学的な計算の上で設計されていたということを知り、なるほどと驚いた。一見複雑に見える図形であっても、日常生活の中に存在するものは、意外と数学で習ったことを使って解き明かしていくこともできるのだなあ、と感じた。そして、より数学が身近なところに隠れていることを知った。しかし、本レポートをまとめるにあたって、ギアと歯車の半径を求めるために、円を紙に鉛筆で描き写し、コンパスを使った垂直二等分線で中心を求めようとした。だが、鉛筆の芯による誤差や歯車のギザギザによるわずかな誤差、歯車をスムーズに動かすためにほどこされているあそびとしての誤差などによって、何度計測しても計算上の半径と誤差が生じてしまった。結局、円の直径をノギスで精密に計ることで誤差を最小限にすることができたが、数学の公式・理論を実測と一致させることはとても難しいことだということが分かった。

また、フリー百科事典「ウィキペディア(Wikipedia)」で調べたところ、このような定規をスピログラフと呼ぶことが分かった。今回の研究では、歯車がギアの内側を回るもののみを研究したが、ギアの外側を回るものも無数に考えられると思った。

参考文献：フリー百科事典「ウィキペディア(Wikipedia)」ースピログラフ
(http://ja.wikipedia.org/)