ベン図についての七章

～はじめに～

最初に言わせてもらおう。**私は数学が大好き**である。
そんな私がとりわけ興味を持つことになったのが、「ベン図」である。数学Ａで初めてベン図に出会ったとき、私はその形の美しさと奥深さに惚れてしまったのである。
今から、私がこれまで趣味として調べてきた「ベン図」についての探究を、いくつかの章に分けて紹介しようと思う。
私のベン図に対する興味と、数学への愛と、そして、我が大いなる**自己満足**について、(途中でうんざりしてくるかもしれないが)是非とも読んでいただきたい。

尚、今回のレポートを書くにあたり使用した図は、私が自分でかいたものであり、証明は全て自力で行った。 どこかのウェブサイトから引用したものではない。見にくいものやわかりにくいものがあるかもしれないが、**私の数学への愛を感じ取って**、あたたかく見守ってほしい(^^)

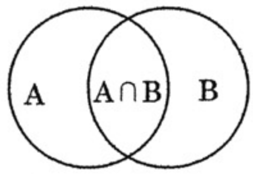
松井　玲穏

第一章　ベン図とは

ベン図についてよく知らない人のためにも、ベン図がどのようなものか簡単にまとめておこう。詳しくご存じの方は、この章を飛ばしても構わない。が、しかし。もう一度確認しておくと、理解が深まるかもしれない。(要するに、読んでいただけると嬉しい)

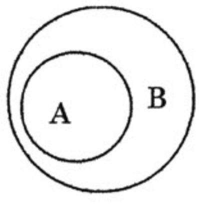
ベン図（Venn diagram）とは、いくつかの集合同士の関係、また、集合の範囲を視覚的に表した図のことである。
考案したのは、イギリスの数学者ジョン・ベン（１８３４～１９２３）(John Venn)。〈図 1〉
各集合を、円などの閉曲線で表し、集合同士の相互関係をその閉曲線の交わり方で表す。〈図 2〉

〈図 1〉(ウィキペディアより)



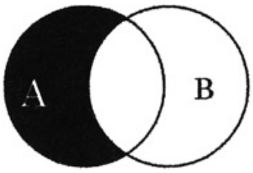
〈図 2〉
A∩B は共通部分を表す

ここで興味深いのが、ベン図とよく似た図形で「オイラー図」というものが存在するということである。
例えば、集合Ａが集合Ｂの部分集合であるということ（A⊂B）を、オイラー図で表すと〈図３〉のようになる。「数学Ａ」を既習した私達にとって、この図をベン図と呼ぶことには何も抵抗がないのであるが、同じことをベン図で表すと、厳密には〈図４〉のようになる。
ベン先生が考案した図では、存在しない「Ａに属しＢに属さない部分」を斜線（〈図４〉では黒塗り）で表したのである。したがって、我々が現在数学の「集合」の単元で用いているのは、本来のベン図とはいえない。



〈図３〉

おわかりいただけるように、ベン図とオイラー図とは明確な違いがある。尚、私のレポートではこれより先、オイラー図ではなく正式なベン図の方を扱うものとする。



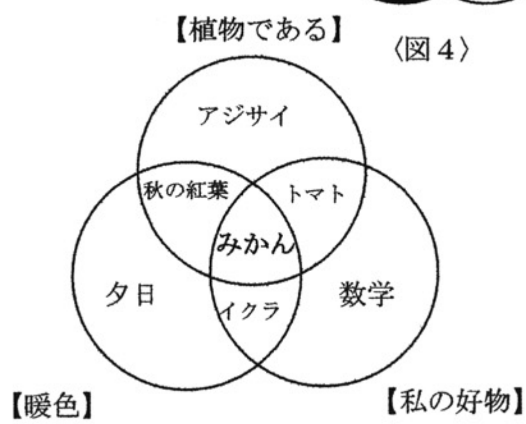
〈図４〉

集合数ｎのベン図は、一般に2^n**個**の領域を持っている。すなわち、集合数１ならば領域は２個、集合数２ならば領域４個、集合数３ならば８、ということだ。

ベン図は非常に便利な図である。例えば、「みかん」を、かなり簡単なベン図で表してみよう。(因みにみかんは私の大好物である)〈図５〉

〈図５〉を見ると、それぞれの要素がどの部分に属しているのかが一目でわかる。
このように、あるものを分類したりする際に、ベン図はとても使い勝手がよい。

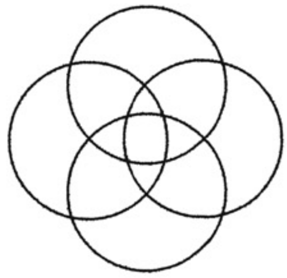
ベン図について、大体のことはわかっていただけたであろうか。さて、次章からはいよいよベン図の面白さについて語っていくことにする。わからないところは軽く受け流して、「何か」を感じてくれるとありがたい。



〈図５〉

第二章　集合数４以上のベン図

数学の問題を解いていて、疑問に思ったことはないだろうか。
「なんでベン図が関係する問題って、集合数が３以下なのだろう？」と。
皆さんが見慣れているベン図というと、円を用いて表されているものが最も一般的である。ところが円のみでは、集合数３までのベン図しか表すことができないのである。このことは、ご存じの方も多いであろう。
実際に円のみでベン図をかこうとすると、〈図６〉のようになってしまう。



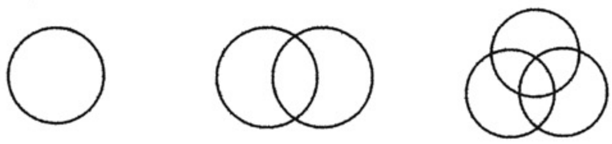
〈図６〉明らかに足りない

数えてみるとわかるが、〈図６〉が分けている領域は１４。しかし第一章で述べたように、2^nに当てはめると、
$2^4=16$となり、２個の領域が足りない。

ここで、どのような場合においても、円だけでは集合数４のベン図がかけないことを証明する。

（証明）

円の数をｎ、分けられる領域をa_n（個）とする。また、集合数ｎのベン図に必要な領域をb_n（個）とする。（$b_n=2^n$は既知とする）



図より、$a_1=2$、$a_2=4$、$a_3=8$

ここで、ｎ＋１番目の円をかいたとき、増える交点の数は最大で２ｎである。
このとき、新たに２ｎの領域ができる。
すなわち、$a_{n+1}=a_n+2n$
$a_1=2$、$a_{n+1}=a_n+2n$　より、
$n\geqq 2$のとき

$$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k)$$
$$=2+n(n-1)$$
$$=n^2-n+2$$

cf.
$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k)$$
$$=2\sum_{k=1}^{n-1}(k)$$
$$=2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)$$

$n=1$のとき$a_1=1^2-1+2=2$
$n=1$のときも成立。

ここで、$n=4$のときa_4は、
$a_4=4^2-4+2=14$

一方、集合数４のベン図に必要な領域b_4は、
$b_4=2^4=16$

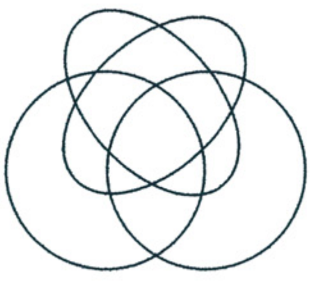
よって、$a_4\neq b_4$
以上より、集合数４のベン図は、円だけでかくことができない。

（証明終）

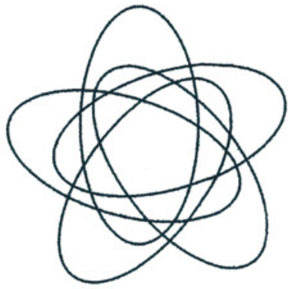
円４つではどのような配置でもベン図にならず、表すことができないのがわかる。また、ｎに５，６…を代入しても$a_n \neq b_n$となってしまう。

それでは、どうやってかけばよいのか。実は、集合数４のベン図は、円を変形させ楕円にすることで表すことができるのである。〈図７〉

楕円にすることで、円ではできなかった２個の領域を補い、なかなか面白い形の図ができた。〈図７〉は２つの円のみ変形させてみたが、もちろんすべて楕円にしてかくこともできる。
そして同じ方法を用いると、集合数５のベン図もかくことが可能だ。〈図８〉



〈図７〉

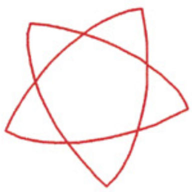


〈図８〉この美しい形。スバラシイ…

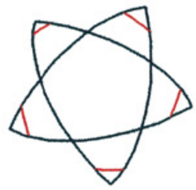
第三章　ベン図をかく

さてここでは、前章で示した集合数５のベン図を、皆さんにもかいていただきたい。
なに？ややこし過ぎて無理だと？大丈夫。実は私、集合数５のベン図の簡単なかき方を、**完全オリジナル**で考えたのである。次に示す方法を用いて、是非かいてみてほしい。

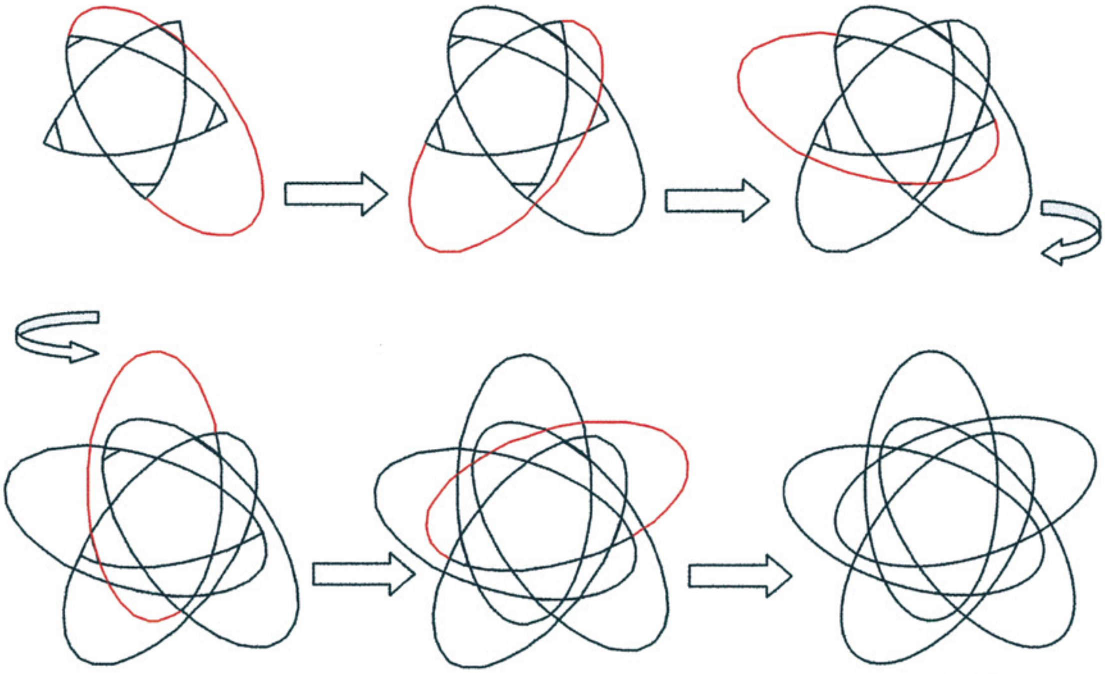
①お星さまをかく



②線を引く



③山の頂上から線を引っ張り、右隣の山の②の線を通り、ひと山飛び越して次の山の頂上につける（これを繰り返す）



完成☆

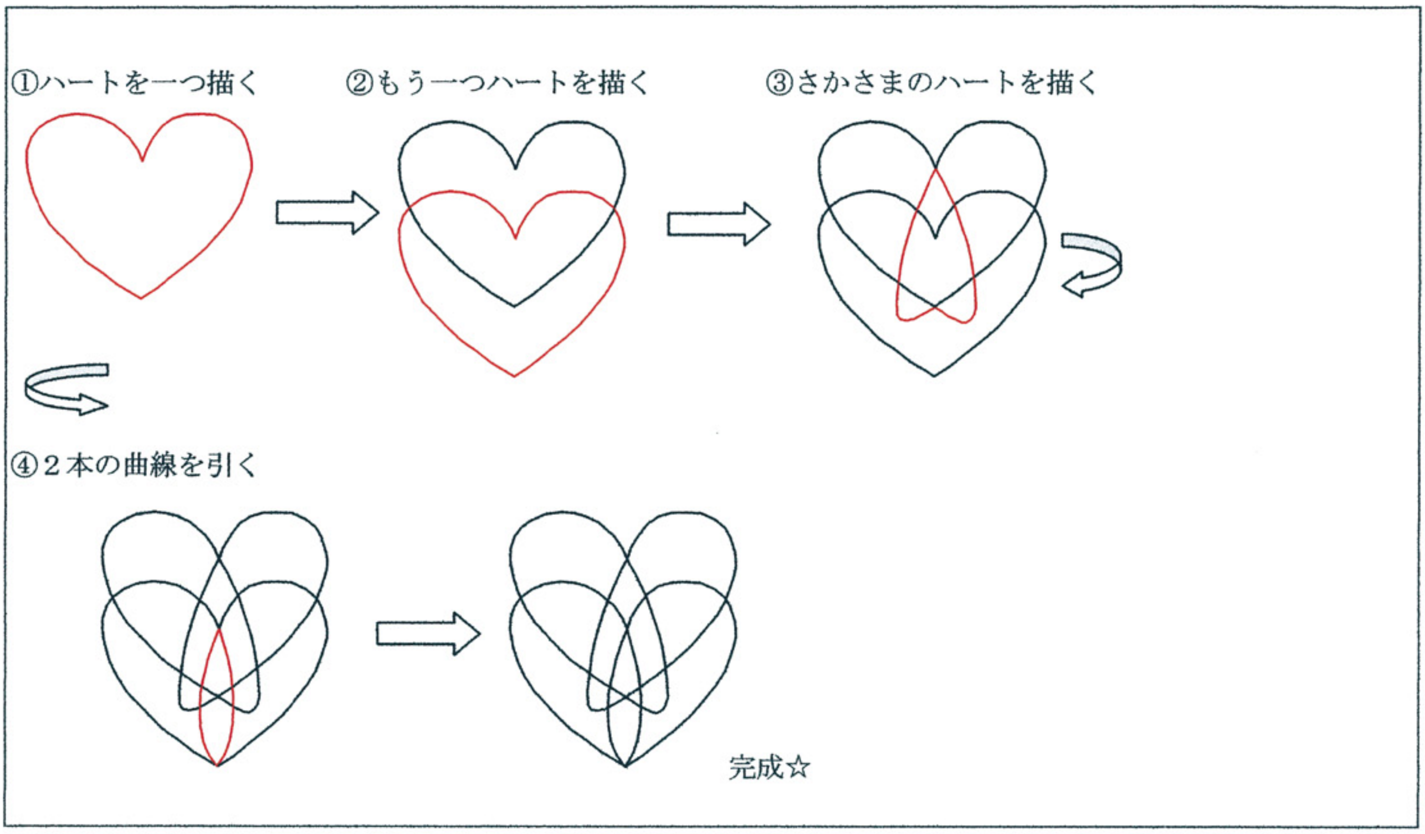
かき方考案：松井

（実際にかいているところが見たい人は、YouTube で「ベン図　集合数５つ」と検索。私がベン図をかいている動画が UP してある。）
上手くかけただろうか？まあ、これがかけたところでいったい何の役に立つのだ、という話ではあるが（笑）

第四章　ベン図を描く

この章では、少し変わったベン図の「描き方」を紹介する。
集合数4のベン図を、なんと、ハートを使って描くのである。

(〈図9〉ベン図とは、私にとって花のようなものだ)



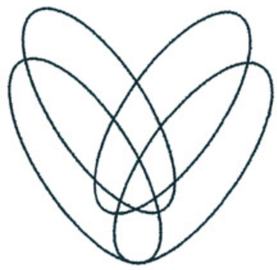
(考案:松井　共同考案者:那須氏)

なかなか可愛らしいだろう。(って思うのは私だけか。)

この完成形を変形させ、楕円にすると(〈図１０〉)ちゃんとベン図になっていることがわかる。ハートを使った描き方の利点は、楕円でかいたときのような重なりの位置のややこしさが少ないことにある。

楕円でかくときも、このハートの方法で軽く下書きしてから楕円形になぞると上手くいくだろう。何気に便利である。
(もっとも、集合数４のベン図をかく機会があればの話だが。)

次章では、様々な形状のベン図を見ていくことにする。



〈図１０〉

第五章　様々なベン図

さてさて。これまで見てきたベン図は、一般によく知られた形をしていた(「一般型」とでも呼んでおこう。)。この章では、変わった形のベン図を紹介しよう。
(尚、それぞれのベン図の名前は、私が勝手につけたものである。ネーミングセンスのなさは無視していただけるとありがたい。)

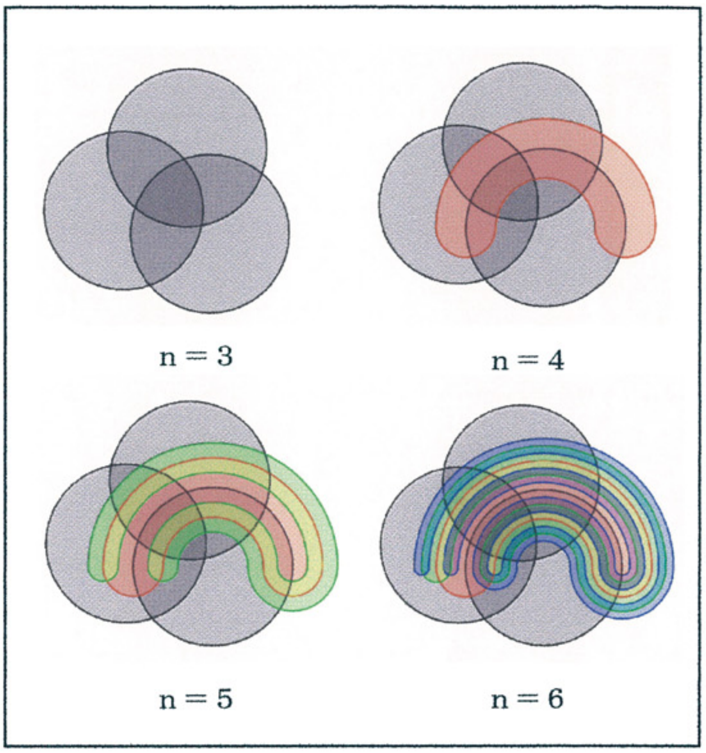
(以下、ｎは集合数を表す)

①蛇型〈図１１〉

一般型と異なるのは、ｎ≧４のとき。蛇のような形の図形を加えることで、ｎ個の集合を表している。ｎ個目の「蛇」は、ｎ－１個目の「蛇」の周を囲うように付け足される。

「蛇」の形を複雑にしていけば、ｎが増えていってもかくことができるようだ。形が面白く、簡単にかける。
しかしながら、集合同士の重なりがややこしく、ある集合と別の集合がどこで重なっているのかが分かりにくいため、実用的ではない気がする。

（このレポートのベン図は私自身がかいたものであるが、「蛇型」〈図１１〉のみウィキペディア【http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%95%E3%82%A1%E3%82%A4%E3%83%AB:Venn3.svg】から引用させていただいた。）



〈図１１〉

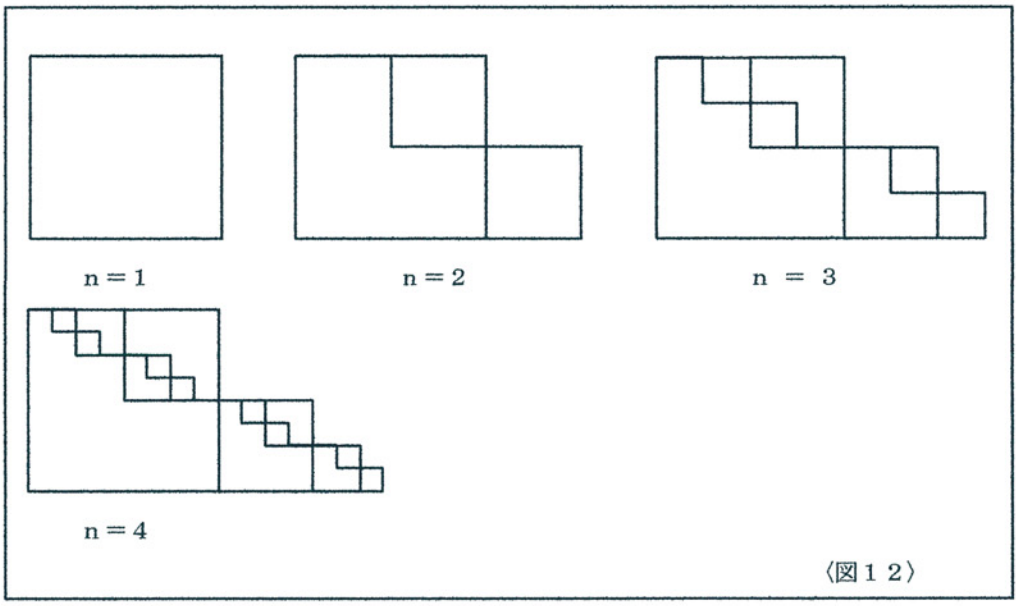
②階段型〈図１２〉

ｎ＝１のときから一般型と異なる。はじめに正方形をかき、次に面積が等しい階段状の図形を加えていくことで表されるベン図。

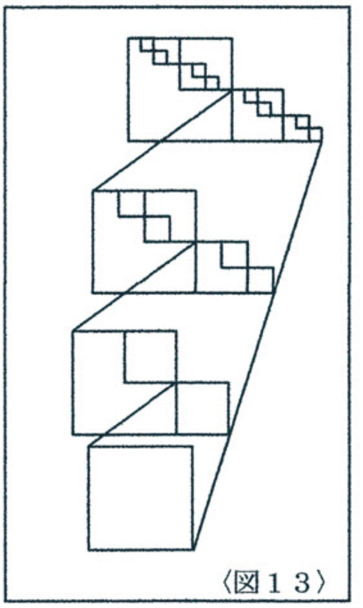
これは私の最も好きなベン図である。この方法を用いると、集合数が増えてもかきやすい。そして注目してほしいのは、相似な図形が繰り返されているということである。

〈図１３〉を見ていただきたい。ｎ＝２の図形において、右端にｎ＝１の図形（正方形）が確認できる。次に、ｎ＝３の図形において、右端にｎ＝２の図形が見られる。
このように、階段型のベン図は視覚的な規則性が非常にはっきりしていることがわかる。それゆえ、私のオススメのベン図は階段型である。（薦められたところで、どうしようもないと思うが。）

このベン図は、後の章でもう一度出てくるので、覚えておいてほしい。



〈図１２〉



〈図１３〉

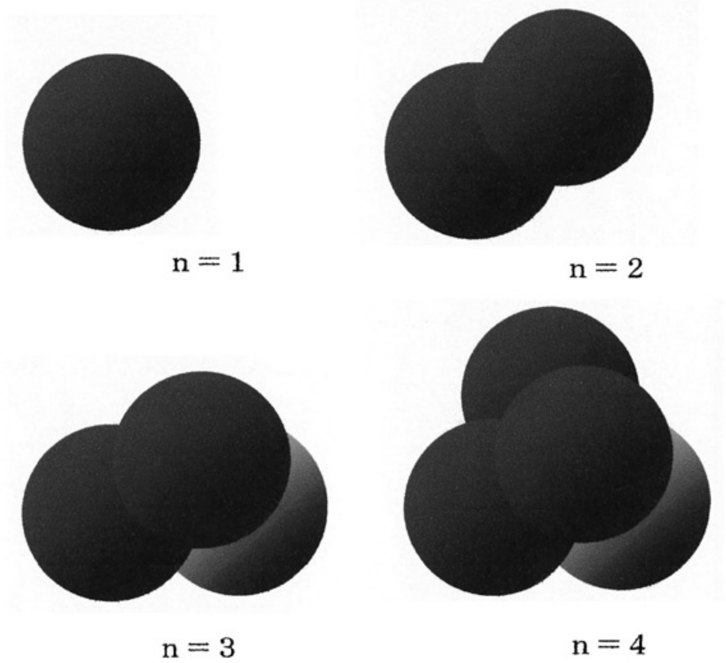
③３Ｄ型〈図１４〉

今までのものと次元自体が異なる。尚、参考文献等一切なしに私が勝手に考えたものである。趣味の範囲なので、軽く受け流していただければよい。

どう見ても原子か分子の図にしか見えないのであるが、一応ベン図になっている。

第二章で述べたように、円だけで集合数４のベン図をかくことはできない。しかし、３次元まで拡張するとかくことができるようだ。ｎ＝３のときの空間的領域は８個。それにもう一つの球を加えると、それぞれの領域を２つに分けることになるので、
８×２＝１６の領域ができ、ベン図となる。

この図は平面上に表すのが非常に困難であり（３Ｄソフトを持っていない私は〈図１４〉を Microsoft Word でかいたのだが、１時間もかかってしまった。）、立体的に見せるのは難しいし、実用性はかなり低い。
（しかも、ｎ＝５以降は思いつかなかった。）
しかしながら芸術的な観点からすると、この立体は価値が高いのではないだろうか。透明な球体が絶妙なバランスで組み合わさったオブジェを考えると、その美しさにうっとりしてしまう。
（…なんて人は、私だけかもしれないが。）



〈図１４〉

第六章　パスカルの三角形との出会い

パスカルの三角形という三角形をご存じだろうか。はじめに頂上に１を書き、その下に１を２つ、横に並べて書く。次に、隣り合う２つの数を足した和を、２数の間の下に記入していく、というものである。〈図１５〉

1
1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
1　5　10　10　5　1
1　6　15　20　15　6　1
1　7　21　35　35　21　7　1
1　8　28　56　70　56　28　8　1
⋮

〈図１５〉

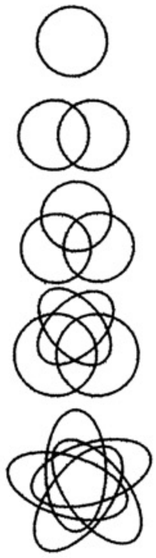
実は、この三角形とベン図との間には、深い関係があるのだ。
一般型で集合数ｎのベン図をかいたとき、ｋ個楕円が重なっている部分の数を N_k（$0 \leqq k \leqq n$、ｋは整数）とする。
（ｋ＝０のとき、N_0は常に１であり、その領域を空集合（φ）と呼ぶ。）
例えば、
ｎ＝１のとき、
$N_0 = 1$
$N_1 = 1$
ｎ＝２のとき
$N_0 = 1$、$N_1 = 2$、$N_2 = 1$ である。

これを表にまとめると、〈図１６〉のようになる。

集合数（ｎ）	領域（個）	０（φ）	１	２	３	４	５
１	２	１	１				
２	４	１	２	１			
３	８	１	３	３	１		
４	１６	１	４	６	４	１	
５	３２	１	５	１０	１０	５	１

おわかりいただけただろうか。

〈図１６〉



重なりの数（k）	0	1	2	3	4	5
	1	1				
	1	2	1			
	1	3	3	1		
	1	4	6	4	1	
	1	5	10	10	5	1

1									→１
1	1								→２
1	2	1							→４
1	3	3	1						→８
1	4	6	4	1					→１６
1	5	10	10	5	1				→３２
1	6	15	20	15	6	1			→６４
1	7	21	35	35	21	7	1		→１２８
1	8	28	56	70	56	28	8	1	→２５６

こんなところで、パスカルの三角形出現である。実をいうと、パスカルの三角形の横一列の数の総和は、2^nとなっているのだ。（２段目をｎ＝１とする。）

そして、それぞれの数字が重なっている部分の数を示している。よく考えると当たり前のような気がするが、何か心が惹かれる繋がりである。

第七章　集合数はいくつでも・・・

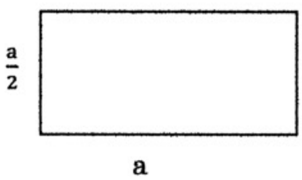
最後に、私が昨年から抱いていた疑問の解答を記しておこう。その疑問とは、
「与えられた紙の上に、任意の集合数のベン図はかけるか」
というものである。

例えば、あなたが縦２０ｃｍ、横４０ｃｍの紙を与えられて、「集合数１００のベン図をかけ」と言われたとする。かくことができるだろうか。それとも、紙からはみ出してしまって、かけないのだろうか。

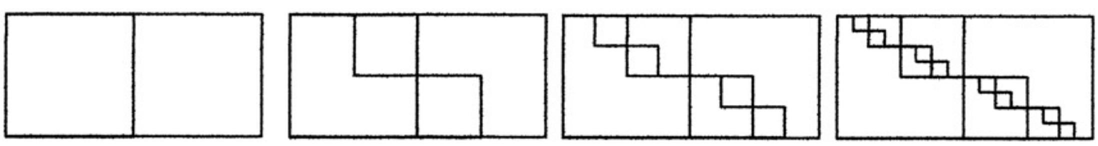
答えは、イエスである。集合数がどれだけ大きくなっても、与えられた紙の上に条件を満たすベン図がかけるのだ。
それでは、そのことを証明しよう。第五章で述べた、階段型のベン図を覚えているだろうか。これを用いて示すことにする。

（証明）

縦の長さ$\frac{a}{2}$、横の長さａの紙が与えられたとする。（ａ＞０）ここに、任意の集合数ｎのベン図がかけることを示す。



ここで、はじめに一辺の長さ$\frac{a}{2}$の正方形をかき、高さと面積の変わらない階段状の図形をかく、という方法でベン図を表す。



ｎ＝１　　ｎ＝２　　ｎ＝３　　ｎ＝４

ここで、縦の長さは常に$\frac{a}{2}$である。$n=k$のときの、ベン図全体の横の長さをa_kとする。
ベン図をはみ出さずにかく条件は、$a_k \leqq a$となることである。

a_kについて、

$a_1=\frac{a}{2}$, $a_2=a_1+\frac{a}{4}$, $a_3=a_2+\frac{a}{8}$, ・・・

すなわち、

$$a_k=a\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^i$$
$$=a\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=a-a\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

条件を満たすとき、$a-a_k \geqq 0$…①
すべての自然数kについて①が成り立つことを、数学的帰納法で証明する。

ｉ）$k=1$のとき

$$a-a_1=a-\left\{a-a\left(\frac{1}{2}\right)^1\right\}$$
$$=\frac{a}{2}>0\quad(\because a>0)$$

ⅱ）$k=p$のとき$a-a_p \geqq 0$が成り立つ、つまり$a\left(\frac{1}{2}\right)^p \geqq 0$が成立すると仮定して、

$k=p+1$のとき$a-a_{p+1} \geqq 0$が成り立つことを示す。
$k=p+1$のとき、

$$a-a_{p+1}=a-\left\{a-a\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}\right\}$$
$$=a\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}=a\left(\frac{1}{2}\right)^p\cdot\frac{1}{2}\geqq 0$$

よって、$k=p$のとき成り立つならば、$k=p+1$のときも成り立つ。

ｉ）、ⅱ）より、すべての自然数kについて、$a_k \leqq a$が成り立つ。

ゆえに、与えられた縦$\frac{a}{2}$、横aの紙に、任意の集合数nのベン図がかけることが示された。

（証明終）

ここで、階段型のベン図を変形し、はじめの正方形を長方形にすれば、任意の紙に、任意の集合数のベン図がかけるのである。

さて、これであなたは、縦２０ｃｍ、横４０ｃｍの紙に、集合数１００のベン図をかくことができる・・・はずである。理論上は。

しかしながら、線の太さ、そして我々の精神力を考えると…不可能に近いようだ、残念ながら。（また、無駄な証明をしてしまった・・・笑）

さて、私のベン図についての研究レポートは、そろそろ終わりである。

おわりに

～レポートを書き終えての一言と、数学に対する私の想い（愛）～

皆さん、私の自己満足にここまで付き合ってくれて、ありがとう。私は大いに感謝している。(私の長くてマニアックすぎる数学の話には、家族もうんざりしているようで、最近は話を聞いてくれないのだ。このレポートのような書物を通して私の考えていることが少しでも知っていただけるだけで、私は嬉しい。)

「ベン図についての七章」、いかがだったかな。難しい計算も載せてしまったが、私が伝えたかったのは、ベン図の奥深さと、視覚的美しさである。あの変わった形は考えれば考えるほど謎を呼び、新しいベン図の表記方法を考えることは、まるで未開の地を切り開いて冒険しているかのようなワクワクと発見に溢れている。(と、思わないかい？)

そんな私の気持ちの一部を、皆さんが感じてくれると、いいなあ。

さて、はじめに述べたように、このレポートの図は（ベン先生の写真と蛇型ベン図を除き）全て私が自らかいたものであり、証明も、知っている知識の範囲で自分なりにやってみた。

大事なことを言いたい。数学の問題集を解いていて、深く考えもしないのに、何の躊躇もなく答えに手を伸ばしてしまうあなた！あなたは数学をエンジョイできていないっ‼数学の面白さと本質は、「自分で考える」ということにあると、私は強く思っている。解法がわからなくても、自分の知っている限りの知識を駆使して、創意工夫して、悩んで、ひらめいて。その過程一つ一つに、数学の輝きが潜んでいるのではないのだろうか。数学に関わるときは、皆さんにも是非「自分で」ということを大切にしてほしい。

私はしばしば数学のことを「数楽」と呼んでいる。やはり、学ぶからには楽しまなければ。人は昔から、数学に親しんできた。数学は役に立つ「道具」としての面とともに、深い味わいのある「知的な楽しみ」という一面を持っている。

「じっくり考え、数学を味わう」ということを大切にし、新たな発見をして喜ぶ。それこそが私の言う「数楽」である。

私にとって数学とは、恋人である。いつも一緒にいて、私を楽しませ、ときに裏切り（←もちろん勉強しなかった自分が悪いのだが)、元気の源となり、考えさせてくれる。これからも、私は数学と一生付き合っていくだろう。そういう面はで、数学とは一生の恋人であり、もっとも長く付き合っていくパートナーなのかもしれない。

松井　玲穏