ウランバートル数学オリンピアード問題に由来するある研究

"On a certain study derived from a problem in Mathematics Olympiad in Ulan Bator"

海城中学校　二年　島倫太郎

Ⅰ研究の動機や目的

交流会の様子

〈写真 1〉 海城の生徒

〈写真 2〉 新モンゴルの生徒

我が海城中高は、新モンゴル中高と skype による定期数学交流会を実施している。そして以前の交流会で、モンゴルのウランバートル市において開催された数学オリンピアードで出題された問題を、それぞれの生徒が解いて発表し合う機会があった。私は、その問題の一つ、数学オリンピアードにおいて正答者 0 であった難問を、独自の方法で解決することができた。

本研究は、その問題で証明した不等式を「立体図形」「統計」「古典的な命題」の 3 種の可視的事象で表現したものである。

Ⅱ研究の結果と考察

まず、問題の解決を行う。問題は次の通りである。

(問題)

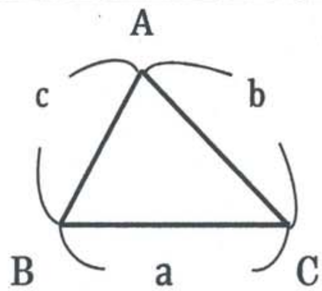
右図のようにΔABCの三辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれa, b, cとした。

このとき

$$a^2+b^2+c^2+4abc < \frac{1}{2}$$

を示せ。

ただし$a+b+c=1$とする。



以下、これを証明していこう。

(証明)

仮定と三角形の成立条件より、

$$a+b > c \qquad \therefore \quad a+b+c=1 \text{ より}$$

$$b+c > a \qquad a+b > \frac{1}{2} \quad \cdots ① \qquad b < \frac{1}{2} \quad \cdots ③$$

$$c+a > b \qquad a < \frac{1}{2} \quad \cdots ② \qquad c < \frac{1}{2} \quad \cdots ④$$

①，④より

$$a+b = \frac{1}{2}+n \quad \cdots ⑤$$

$$c = \frac{1}{2}-n \quad \cdots ⑥ \qquad \left(0< n < \frac{1}{2} \quad \cdots ⑦\right) \text{ と表せる}$$

$$\therefore \quad a^2+b^2+c^2+4abc=(a+b)^2-2ab+c^2+4abc$$

$$=(a+b)^2+2ab(2c-1)+c^2$$

$$=\left(\frac{1}{2}+n\right)^2+2ab(1-2n-1)+\left(\frac{1}{2}-n\right)^2$$

$$(\because ⑤, ⑥)$$

$$= \frac{1}{4}+n^2+n-4abn+\frac{1}{4}+n^2-n$$

$$= \frac{1}{2}+2n^2-4abn$$

$$= \frac{1}{2}+2n(n-2ab) \quad \cdots ⑧$$

と表せる。

よって $2n(n-2ab)<0$ ならば証明終了である。

今、⑤より

$$ab=a\left(\frac{1}{2}+n-a\right)$$

$$=\frac{1}{2}a+an-a^2 \qquad \therefore \ 2ab-n=a+2an-2a^2-n$$

$$\therefore \ 2ab=a+2an-2a^2 \qquad =(n-a)(2a-1) \quad \cdots ⑨$$

(i) $a>n$ の時

$n-a<0$ …⑩

②より

$2a-1<0$ …⑪

⑩, ⑪より

$(n-a)(2a-1)>0$ …⑫

(ii) $n>a$ の時

⑤より

$a-n=\frac{1}{2}-b$ …⑬

③より

$\frac{1}{2}-b>0$ …⑭

⑬, ⑭より

$a-n>0$ …⑮

⑮より

$n>a$ の場合は存在しない …⑯

⑫, ⑯より

$$(n-a)(2a-1)>0$$

$$\therefore\ 2ab-n>0\quad (\because ⑨)$$

$$\therefore\ 0>n-2ab\quad \cdots ⑰$$

また、⑦より

$$n>0$$

$$\therefore\ 2n>0\quad \cdots ⑱$$

⑰, ⑱より、

$$0>2n(n-2ab)\quad \cdots ⑲$$

⑧, ⑲より、

$$a^2+b^2+c^2+4abc=\frac{1}{2}+2n(n-2ab)<\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}\quad ■$$

新たに“n”を定義して a+b,c の値を簡単に表すという独自の発想によって、因数分解と場合分けという初等数学の知識のみでの証明を行うことができた。
以降ではその意味付けを行い、この不等式の秘める他分野への応用の可能性を提示する。

(ⅰ)幾何学的意味付け①　直方体の表面積

(主張)

縦 a,横 b,奥行き c の直方体について次の条件が成り立つときその表面積は必ず$\frac{1}{2}$より小さい

・$a+b+c=1$

・どの二辺の長さの和をとってもほかの一辺の長さより長い

(証明)

二つの条件から先ほどの不等式が成り立ち、

$$a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}$$

$a+b+c=1$ より、

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1^2=1$$

$\therefore 4abc+\frac{1}{2}<2(ab+bc+ca)$

$0<a,\ 0<b,\ 0<c$ より、$0<4abc$となるので、

$\frac{1}{2}<2(ab+bc+ca)$

$2(ab+bc+ca)$は、縦 a,横 b,奥行き c の直方体の表面積より、主張は正しい　(Q.E.D)

(ⅱ)幾何学的意味付け②　等面四面体

(基礎知識)

等面四面体とは直方体の隣り合わない頂点を結んでつくられる四面体のことである。

四つの面がすべて合同であるという性質を持つ。

(主張)

すべての辺の長さの和が 2 である等面四面体の頂点が、縦 a, 横 b, 奥行き c の直方体の頂点上に存在するとき、その直方体は必ず

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}<\frac{1}{4}$$

を満たしている。

(証明)

等面四面体の異なる長さの 3 辺(p,q,r)の和が 1(つまり、すべての辺の長さの和が 2)であるとき、先ほどの不等式から

$$p^2+q^2+r^2+4pqr<\frac{1}{2}(\ldots A)$$

が成り立つ。

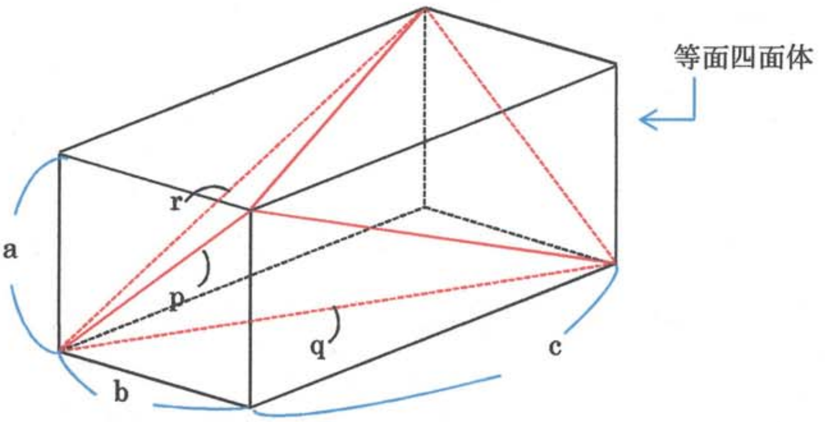
今、この等面四面体の頂点が縦 a,横 b,奥行き c の直方体の頂点上に存在しているとすると、p,q,r は

それぞれ$\sqrt{a^2+b^2}$,$\sqrt{b^2+c^2}$, $\sqrt{c^2+a^2}$と表すことができる。

これをA式に代入すると、

$$p^2+q^2+r^2+4pqr=(\sqrt{a^2+b^2})^2+(\sqrt{b^2+c^2})^2+(\sqrt{c^2+a^2})^2+4\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$
$$=(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)+4\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$
$$=2(a^2+b^2+c^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)})<\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a^2+b^2+c^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}<\frac{1}{4}\quad \text{(Q.E.D)}$$



(iii)統計学的意味付け①　玉の取出しの反復試行

(主張)

袋に赤玉がa個,青玉がb個,白玉がc個入っていて、二つの色の玉の個数の和は必ず残りの色の玉の個数より多い。今、ランダムに1つの玉を取り出して色を確認したのち玉を袋に戻し、再度玉を1つ取り出す作業をこの袋に対してすると、取り出した二つの玉の色が同じである確率は、必ず$\frac{1}{2}$より小さい。

(証明)

ランダムに1つの玉を袋から取り出すとき、その玉の色が赤,青,白である確率は、

それぞれ$\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{b}{a+b+c}$, $\frac{c}{a+b+c}$(ただし$\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1$)となり、また、

仮定から $\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}>\frac{c}{a+b+c}$, $\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}>\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}>\frac{b}{a+b+c}$ と

することができる。

よって先ほど証明した不等式から、

$$\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^2+4\cdot\frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{c}{a+b+c}<\frac{1}{2}$$ が成り立つ。

$0<4\cdot\frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{c}{a+b+c}$より、

$$(\frac{a}{a+b+c})^2+(\frac{b}{a+b+c})^2+(\frac{c}{a+b+c})^2(<(\frac{a}{a+b+c})^2+(\frac{b}{a+b+c})^2+(\frac{c}{a+b+c})^2+4\cdot\frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{c}{a+b+c})<\frac{1}{2}$$

玉を1つ取り出して色を確認したのち玉を袋に戻し、再度玉を1つ取り出す作業をこの袋に対してしたときに、二連続で赤玉が出る確率は$(\frac{a}{a+b+c})^2$であるから$(\frac{a}{a+b+c})^2+(\frac{b}{a+b+c})^2+(\frac{c}{a+b+c})^2$は二連続で同じ色(赤、青、白のどれでもよい)の玉が出る確率を表す。よって主張は正しい。 (Q.E.D)

〈補足〉適応に必要な条件が少ないため、ここで導出した不等式は特に実用的なものである。
例えば、赤玉が1234567890個、青玉が987654321個、白玉が1357924680個というような膨大な数の玉が袋に入っている場合でも、1234567890＋987654321＞137924680、987654321＋1357924680＞1234567890、1357924680＋1234567890＞987654321を満たしているため、ランダムに玉を一つ取り出してそれを戻し、もう一度玉を取り出した時に、取り出した玉の色が同じである確率は$\frac{1}{2}$より小さいことが、計算しなくてもわかってしまうのである。

(ⅳ)統計学的意味付け② ポリアの壺

(基礎知識)

“ポリアの壺”の試行では、色iの玉がa_i個入っている壺に対して、次の作業を行う。($1\leqq i\leqq c,\ i\in\mathbb{N}$)

作業

> ランダムに玉を一つ取り出して色を確認したのち、取り出した玉と、それと同じ色の玉m個(計$m+1$個)を壺に入れる。(ただし、$m\in\mathbb{N}$)

一般に、n回目の作業で色iの玉を取り出す確率は、m, nの値に関係なく

$$P_n(i)=\frac{a_i}{s}\quad (s=\sum_{i=1}^{c}a_i とする)$$ となることが知られている。

〈例〉 壺に赤玉がp個、青玉がq個、白玉がr個入っていて、玉を一つ取り出して色を確認したのち、取り出した玉と、それと同じ色の玉3個(計4個)を壺に入れる作業をすると、7回目の作業で赤玉を取り出す確率は

$$P_n(1)=\frac{a_1}{\sum_{i=1}^{3}a_i}=\frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}=\frac{p}{p+q+r}$$ となる。

(この例では赤玉、青玉、白玉がそれぞれ色1、色2、色3にあたり、その個数p、q、rがa_1、a_2、a_3にあたる。)

(主張)

> 壺に赤玉がa個、青玉がb個、白玉がc個入っていて、二つの玉の個数の和は必ず残りの色の玉の個数より多い。今、ポリアの壺の試行をこの壺に対してn回行い、そのうちの二回分の試行で取り出した玉の色を調べるとき、色が同じである確率は、必ず$\frac{1}{2}$より小さい。

(証明)

ポリアの壺の性質から、何回目の試行の結果をとっても、赤玉、青玉、白玉を取り出す確率は

それぞれ$\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{b}{a+b+c}$, $\frac{c}{a+b+c}$(ただし$\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1$)となる。

また、仮定から$\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}>\frac{c}{a+b+c}$, $\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}>\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}>\frac{b}{a+b+c}$ と

することができる。

以下、統計学的意味付け①と同様にして、

$$\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^2\left(<\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^2+4\cdot\frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{c}{a+b+c}\right)<\frac{1}{2}$$

が導かれ、証明される。(Q.E.D)

〈補足〉何回目の試行でも確率は同じため、色を調べる試行回数を限定する必要はない。

考察

- 証明した不等式に幾何学的、及び統計学的な意味付けを行うことができた。
- 幾何学的意味付け①で導出したような式を明確に証明するのは意外と難しいが、証明した不等式を用いることで簡単かつ明確に示すことができた。
- 統計学的意味付け①で導出した不等式は適応に必要な条件が少なく、実用性が高い。
- 統計学的意味付け①・②では 4abc の値を詳しく算出することができれば、導出した不等式の範囲をさらに限定することができると考えられる。

Ⅲ感想と今後の課題

独自の工夫によって、初等幾何の知識だけで難しい問題を解決できたこと、そしてそれを他分野における新たな評価式の導出へ応用することができたのは、本研究の重要な成果であった。また、研究していく中で自分自身でもその不等式の応用の可能性に驚くことがあり、研究を楽しむことができた。

今後は$a^2+b^2+c^2+4abc$(ただし a+b+c=1)の最大値・最小値を計算で求めることを試みる。そしてそれを関数化できれば、より応用の可能性が広がると考えている。また、本研究では「一度取り出した玉は戻す」、「一度取り出した玉は戻し、さらに同じ色の玉を増やす」という二つの条件下で二回玉を取り出す時に、取り出した玉の色が同じである確率の評価式を求めることができた。そこで、次は一度取り出した玉は戻さないという条件下での確率について、評価式を導出したい。

Ⅳ参考文献

「等面四面体とその性質 | 高校数学の美しい物語」(http://mathtrain.jp/tomen)
「ポリアの壺にまつわる確率とその証明 | 高校数学の美しい物語」(http://mathtrain.jp/polya)