

ある平面幾何の定理と Miquel 点の関係

灘高等学校 1 年 中 洋貴

2022 年 8 月 17 日

1 はじめに～動機と概要～

この論文では、私が発見し『数学セミナー』(日本評論社)に掲載された平面幾何の定理を再考し、その初等的な証明を与える。この定理の主張は、任意の三角形に対して定義されるある三角形が、もとの三角形と相似であるというものである(詳しい内容は 3 章で述べる)。定理に登場するのは、もととなる三角形とその頂点から対辺に下ろした垂線、辺の垂直二等分線のみであり簡単に証明ができるように思えたのだが、私はこの定理の発見当時、初等的な証明がわからなかった。直線しか登場しないので、座標計算によって主張が成り立つことを確認することは可能である。しかし、外心や垂心について考えたことがある人なら一度は描いたことがあるシンプルな図の中にこのような関係があるのであれば、それを初等的に証明すると面白い関係を見出せるのではないかと、初等的な証明を試みた。その過程で、定理の構図の中に *Miquel* 点を見出すことができた。

2 Miquel 点の基礎知識

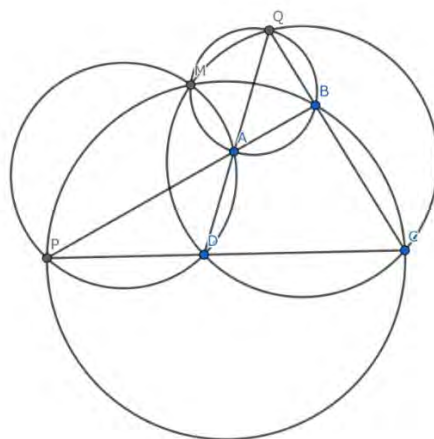


図 1

2.1 *Miquel* 点の定義

(凸)四角形 $ABCD$ において、直線 AB と直線 CD が点 P で交わり、直線 AD と直線 BC が点 Q で交わるとする。このとき、三角形 ADP, BCP, BAQ, CDQ それぞれの外接円はある点 M で交わる。この点を四角形 $ABCD$ の *Miquel* 点(ミケル点)と呼ぶ。

2.2 Miquel 点の存在証明

Miquel 点が存在することを証明する。

三角形 BAQ の外接円と三角形 CDQ の外接円の Q でない交点を M' とする。このとき、4 点 A, D, P, M' が共円であることと 4 点 B, C, P, M' が共円であることを示せばよい。4 点 M', Q, B, A が共円かつ 4 点 M', Q, C, D が共円なので、円に内接する四角形の性質より、

$$\angle M'AP = \angle M'QB, \angle M'DP = \angle M'QC$$

である。よって

$$\angle M'AP = \angle M'DP$$

であるので、4 点 A, D, P, M' は共円である。同様にして、

$$\angle QBM' = \angle QAM', \angle QAM' = \angle DPM'$$

が得られるので、

$$\angle QBM' = \angle DPM' = \angle CPM'$$

が得られる。よって、4 点 B, C, P, M' は共円である。以上より、示された。¹ ■

¹ 2.2 で挙げた証明は、4 点 A, B, C, D が図 2 のような配置の場合などで成り立たない。このような場合にも角度計算のみで示すことはできるが、ここではシムソンの定理を用いた証明を紹介しようと思う。シムソンの定理を用いた証明は 4 点 A, B, C, D の配置によらず使えるが、2.2 で挙げた証明の方がより自然な発想なので、それを先に紹介した。

証明：(図 3 も参照) 直線 AB と直線 CD の交点を P 、直線 AD と直線 BC の交点を Q とする。三角形 BAQ の外接円と三角形 CDQ の外接円の Q でない交点を M' とする。このとき、4 点 A, D, P, M' が共円であることと 4 点 B, C, P, M' が共円であることを示せばよい。 M' から直線 BC, DC, AD, BA に下ろした垂線の足をそれぞれ X, Y, Z, W とする。このとき、シムソンの定理より、3 点 X, Y, Z は共線であり ($\because$ 4 点 M', Q, C, D が共円)、3 点 X, Z, W も共線である ($\because$ 4 点 M', Q, B, A が共円)。従って 4 点 X, Y, Z, W は共線である。よって、シムソンの定理より、 M' が三角形 ADP の外接円上にあること ($\because$ 3 点 Y, Z, W が共線) と M' が三角形 BCP の外接円上にあること ($\because$ 3 点 X, Y, W が共線) がわかる。よって、4 点 A, D, P, M' が共円かつ 4 点 B, C, P, M' が共円であることがわかる。以上より示された。■

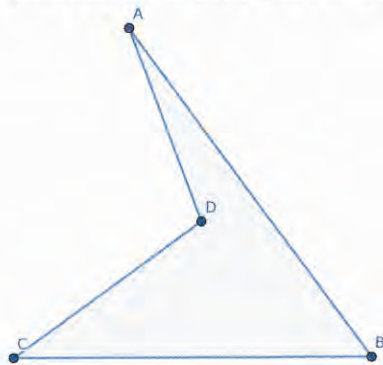


図 2

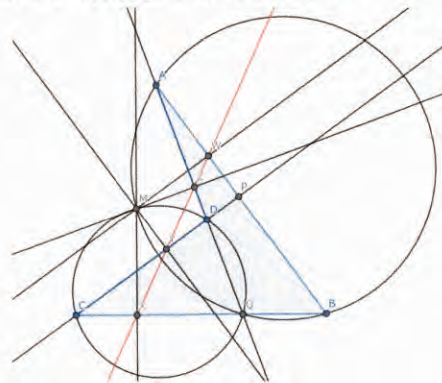


図 3

2.3 Miquel 点の定義の拡張

Miquel 点は「四角形 $ABCD$ 」が存在するような位置に 4 点 A, B, C, D がなくとも定義される。例えば、図 3 のような配置でも Miquel 点は定義され、存在を証明できる。角度計算による証明でも、脚注で紹介したシムソン線を用いた証明でも証明できる(図 4 は後者の証明を表したもので、 M が「四角形」 $ABCD$ の Miquel 点である)。

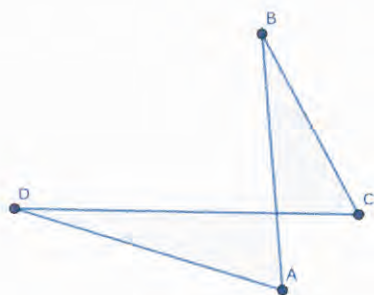


図 3

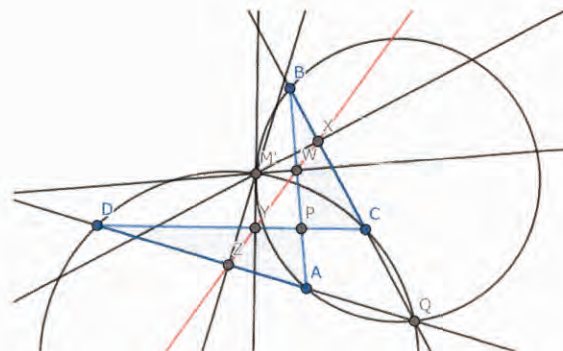


図 4

2.4 Miquel 点の重要な性質

Miquel 点に関する性質は数多くあり、特に回転相似を多く生むということが知られている。図 1 において、 M は $AB \rightarrow DC$, $AD \rightarrow BC$, $DP \rightarrow QB$, $BP \rightarrow QD$, $AP \rightarrow QC$, $CP \rightarrow QA$ の回転相似の中心である。これは簡単な角度計算により確かめられる。

3 発見した定理

ここでは私が発見し『数学セミナー』(日本評論社)に掲載された定理の内容を紹介する。定理の内容は以下の通りである。

定理 $\triangle ABC$ が正三角形ではないとき、 B から AC に下ろした垂線と AB の垂直二等分線との交点を D 、 C から AB に下ろした垂線と BC の垂直二等分線との交点を E 、 A から BC に下ろした垂線と AC の垂直二等分線との交点を F とする。このとき $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は相似である。($\triangle ABC$ が正三角形のとき、 $\triangle DEF$ は一点に退化する。)²

図にすると次のようになる。

² 中 洋貴, 作図アプリで見つけた定理, 数学セミナー, 2020, 59(11), 56 頁

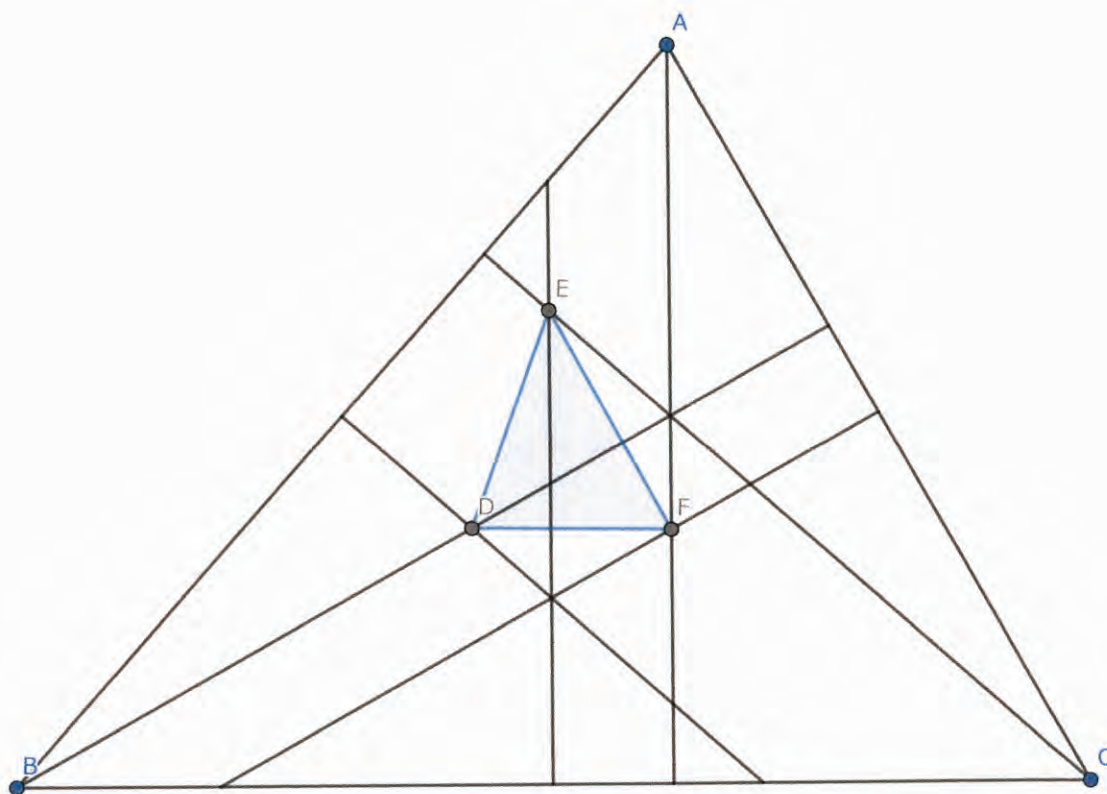


図 6

この定理を発見したものの、しばらくは初等的な証明が分からなかった。以降はこの定理を初等的に証明するとともに、その過程で発見した事実を述べる。

4 定理の証明と発展

以下では、初等的な証明を行う過程で発見した事実を述べる。3章で紹介した定理は4.7で証明されており、今回扱う構図と *Miquel* 点との関係は4.8,4.9,4.11で明らかにされている。ただし、各々の命題の証明は図6の場合についてのものである。

B から AC に下ろした垂線と AB の垂直二等分線との交点を D 、 C から AB に下ろした垂線と BC の垂直二等分線との交点を E 、 A から BC に下ろした垂線と CA の垂直二等分線との交点を F とする。

4.1 命題1

AB の垂直二等分線と BC の垂直二等分線の交点を P とし、 BC に関して P と対称な点を Q とする。このとき、4点 B, D, P, Q は共円である。(ここで P は三角形 ABC の外心である)

(証明)

直線 PD 上において D に関して P と反対側に点 K をとると、

$$\angle PQB = \angle BPQ = \angle BAC = \angle BDK$$

であるので示された。

4.2 命題 2

C から AB に下ろした垂線と AC の垂直二等分線の交点を R としたとき、4 点 P, R, C, Q は共円である。

(証明)

直線 PD 上において P に関して R と反対側に点 L をとると

$$\angle CQP = \angle CPQ = \angle BAC = \angle CRL$$

であるので示された。

4.3 命題 3

三角形 ABC と三角形 QEC は相似である。

(証明)

P が外心であることなどに注意すると

$$\angle CQE = \angle CPQ = \angle BAC$$

である。また、 PR と CA の交点を M 、 PQ と BC の交点を N としたとき、4 点 P, M, C, N は共円であるので、これと命題 2 をあわせて

$$\angle ECQ = \angle EPR = \angle BCA$$

が得られる。以上より示された。

4.4 命題 4

直線 CF と直線 QD の交点を S としたとき、4 点 S, E, C, Q は共円である。

(証明)

$\angle ECS = \angle EQS$ を示せばよい。

命題 1 より、

$$\angle EQS = \angle DQP = \angle DBP$$

が得られる。また、

$$\angle DBP = \angle DBC - \angle PBC$$

である。さらに、仮定より、

$$\angle ECS = \angle ACS - \angle ACE = \angle ACF - \angle ACE = \angle CAF - \angle ACE$$

であり、

$$\angle PBC = \angle ACE, \angle DBC = \angle CAF$$

である。以上より、

$$\angle ECS = \angle EQS$$

であることが示された。

4.5 命題 5

三角形 DBQ 、三角形 RQC は共に三角形 ABC と相似である。また、三角形 DBQ と三角形 RQC は合同である。

(証明)

前者は命題 1, 2 と角度計算により確かめられる。後者は $BQ = QC$ に注意すれ

ば明らかである。

4.6 命題 6

三角形 ECF と三角形 EQD は相似である。

(証明)

命題 4 において $\angle ECS = \angle EQS$ が示されているので、

$$EC : EQ = CF : QD$$

を示せばよい。命題 3 より、

$$EC : EQ = BC : BA$$

である。また、命題 5 より、

$$CF : QD = CF : CR = AF : CR$$

である。さらに、

$AF : CR = 2AF : 2CR = AC / \sin \angle BCA : AC / \sin \angle CAB = \sin \angle CAB : \sin \angle BCA$
であり、正弦定理より

$$\sin \angle CAB : \sin \angle BCA = BC : BA$$

である。以上より、示された。

4.7 命題 7

三角形 DEF は三角形 ABC と相似である。

(証明)

命題 6 より三角形 DEF と三角形 QEC が相似であることがわかる(回転相似の性質)。また、命題 3 より三角形 QEC と三角形 ABC が相似であるので、示された。これは 3 章で挙げた定理の主張である。

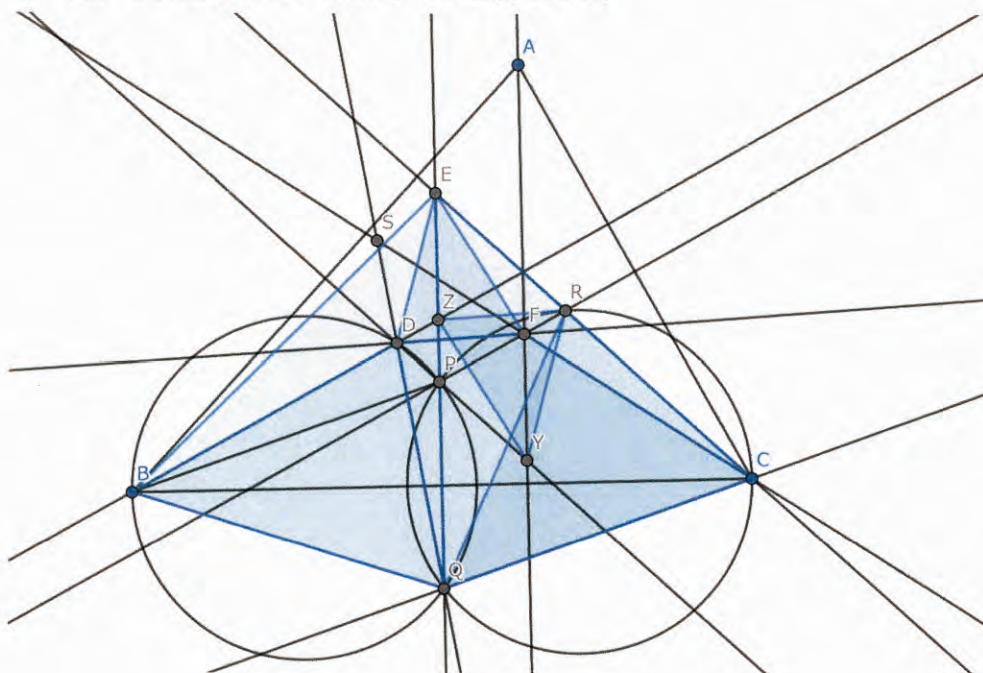


図 7

4.8 命題 8

点 E は四角形 $DFCQ$ の *Miquel* 点である。

(証明)

命題 7 より

$$\angle DEF = \angle QEC$$

である。また、命題 4 より

$$\angle QEC = \angle QSC = \angle DSF$$

であるので、

$$\angle DEF = \angle DSF$$

が得られる。よって、4 点 D, S, E, F が共円であることがわかる。

また、命題 4 より 4 点 S, E, C, Q は共円であるので、*Miquel* 点の定義より、 E が四角形 $DFCQ$ の *Miquel* 点であることがわかる。

4.9 命題 9

AB に関して P と対称な点を T 、 CA に関して P と対称な点を U とすると、命題 8 と同様に、点 D, F はそれぞれ四角形 $FEBT$ 、四角形 $EDAU$ の *Miquel* 点である。

(証明)

命題 8 と同様に証明できる。ここで、4 点 F, E, B, T および 4 点 E, D, A, U は、2.3 で挙げたような配置になっている。

4.10 命題 10

A から BC に下ろした垂線と AB の垂直二等分線の交点を Y 、 B から AC に下ろした垂線と BC の垂直二等分線の交点を Z とすると、三角形 RYZ と三角形 DEF は合同である。

(証明)

A から BC に下ろした垂線と BC の垂直二等分線、 B から CA に下ろした垂線と CA の垂直二等分線、 C から AB に下ろした垂線と AB の垂直二等分線がそれぞれ平行であることと、 A から BC に下ろした垂線、 B から CA に下ろした垂線、 C から AB に下ろした垂線が一点で交わること(垂心の存在)、 AB の垂直二等分線、 BC の垂直二等分線、 CA の垂直二等分線が一点で交わること(外心の存在)をあわせると、平行四辺形の性質より DR の中点、 EY の中点、 FZ の中点が一致することがわかる。よって、三角形 RYZ と三角形 DEF が相似であることがわかる。

4.11 命題 11

三角形 RYZ についても命題 8, 9 と同じような性質が成り立つ。具体的には、3 点 R, Y, Z はそれぞれ四角形 $YZCU$ 、四角形 $ZRAT$ 、四角形 $RYBQ$ の *Miquel* 点である。

(証明)

命題 8 と同様に証明できる。

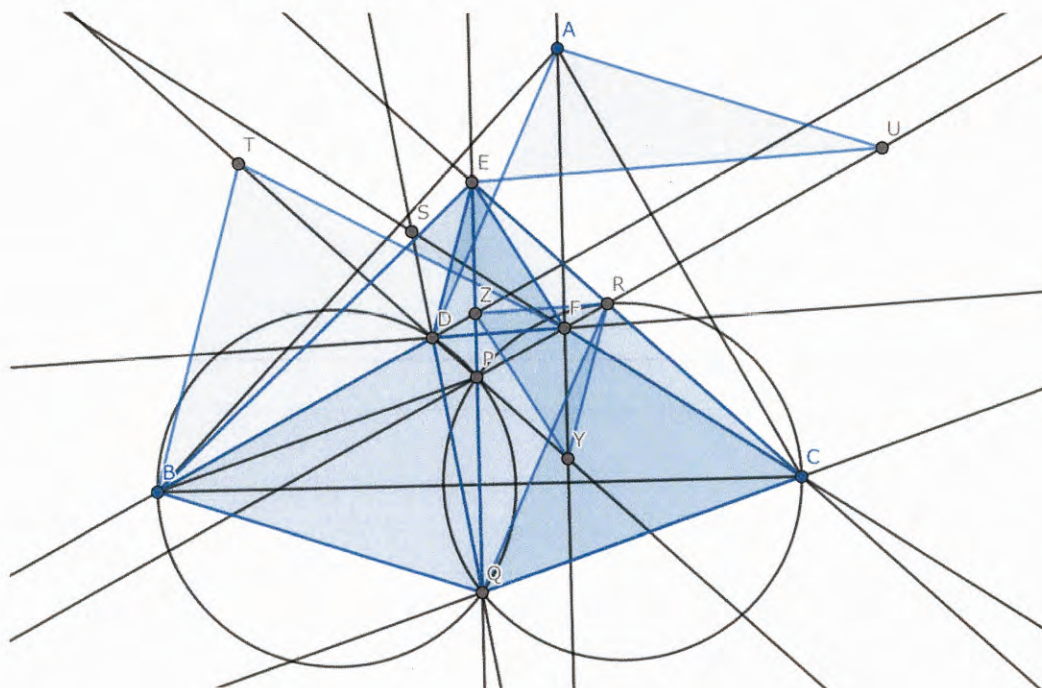


図 8

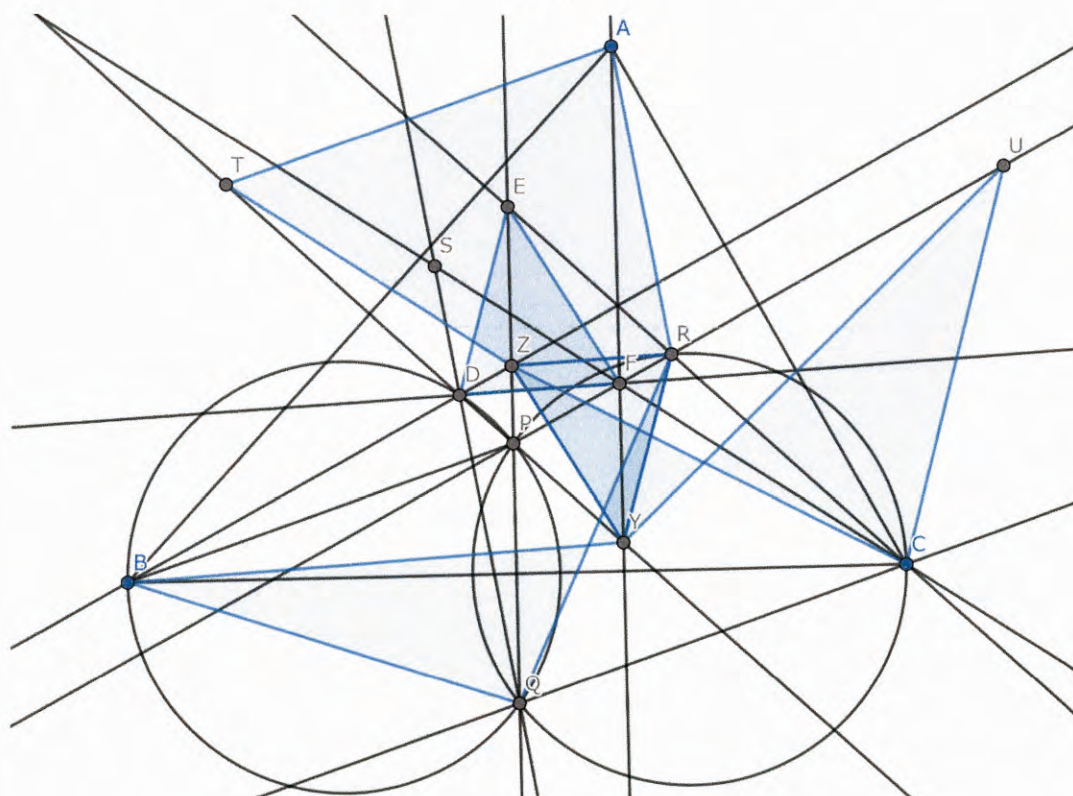


図 9

5 おわりに～感想と課題～

今回の研究では、三角形に関する単純な直線しか扱っていない。それにもかかわらず *Miquel* 点などの構造を見出すことができた。*Miquel* 点については競技数学の勉強をしているときに知ったのだが、それが自分で発見した定理と関わっていることがわかり初等幾何の奥深さを垣間見ることができたと思う。

今後の課題としては、3 章で挙げた定理を一般化することなどが挙げられるだろう。また、今回扱った構図には *Miquel* 点以外にも様々な構造が潜んでいると予想されるので、それらを網羅的に探索することも今後の課題として考えられるだろう。最後に、まだ初等的に解決できていない命題を紹介して終わろうと思う。

予想 三角形 ABC について、直線 BC 上に点 D を、直線 CA 上に点 E を、直線 AB 上に点 F をとり、 BC の中点を G 、 CA の中点を H 、 AB の中点を I とする。ここで、 I を通り CF と平行な直線と AD の交点を P 、 G を通り AD と平行な直線と BE の交点を Q 、 H を通り BE と平行な直線と CF の交点を R とする。また、 H を通り BE と平行な直線と AD の交点を X 、 I を通り CF と平行な直線と BE の交点を Y 、 G を通り AD と平行な直線と CF の交点を Z とする。このとき、三角形 PQR と三角形 XYZ の面積は等しい。

上の予想が正しければ、3 章で紹介した定理はこの予想の特殊な場合ということになる。

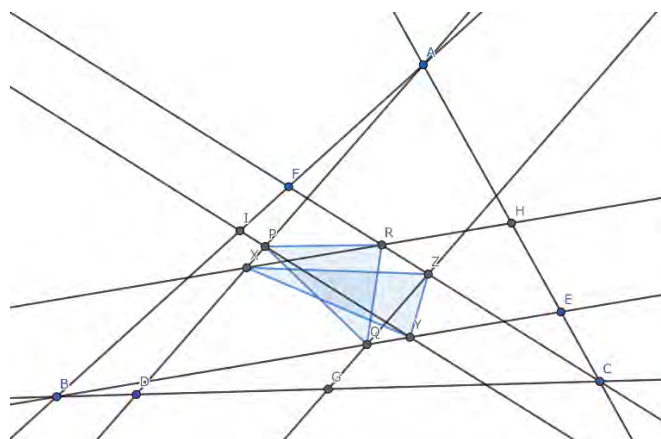


図 10

参考文献

- [1] 中 洋貴. 作図アプリで見つけた定理. 数学セミナー. 2020, 59(11), 56 頁
- [2] Howard Halim. “Spiral Similarity”. Canada IMO Training 2020 Winter Camp. 2020.
https://drive.google.com/file/d/1d-9bGEE1_pnOxVlpLHMNRIDoA1JFY3n/view , (参照 2022-08-25)