ｎ次元空間における反転幾何を用いたｎ次超球の体積の導出

筑波大学附属駒場高等学校　２年　澤本雄正

1　はじめに　～研究の動機～

数学の授業で習った平面における反転幾何が興味深かったため、その活用方法を模索したところ、空間での拡張性があることが確かめられた。そして、その性質を用いた活用方法を考えたところｎ次超球の体積を求めようという発想に至り、その結果の導出を本研究の目的とすることにした。

2　ｎ次空間における反転の性質の確認

2.1 平面における反転の定義とその性質

まず平面における反転とは以下のような操作のことである。

平面上のある点Ｏに対して、点Ｏと点Ｐを結ぶ半直線上に $OP \cdot OQ = r^2$ を満たす点Ｑをとる

この時、点Ｏを中心とする半径ｒの円を基準円などと呼ぶ。

このような平面の反転においては次のような事実が知られている。

(ⅰ)点Ｐが点Ｏを通らない直線の線上に存在するとき、点Ｑは原点を通る円を描く

(ⅱ)点Ｐが点Ｏを通る直線の線上に存在するとき、点Ｑは原点を通る直線を描く点Ｐが点Ｏを通らない円の周上に存在するとき、点Ｑは原点を通らない円を描く

(ⅲ)点Ｐが点Ｏを通らない円の周上に存在するとき、点Ｑは原点を通らない円を描く

(ⅳ) 点Ｐが点Ｏを通る円の周上に存在するとき、点Ｑは原点を通らない直線を描く

この証明は後に一般化した形で行うものとしここでは省かせてもらう

2.2　ｎ次空間への拡張

ここからは上記のような反転の操作をｎ次の空間に拡張することを目指す。ただし、本研究では想定されるｎ次の空間はｎ次のユークリッド空間を想定するものとする

まず上記の定義通りn次においても反転を定義する

空間上のある点Oに対して、点Oと点Pを結ぶ半直線上に $OP \cdot OQ = r^2$ を満たす点Qをとる

この時、点Oを中心とする半径rの超球を基準球などと呼ぶことにする。

このような空間上の反転においては次のような事実が存在する。

(ⅰ)点Pが点Oを通らない超平面の面上に存在するとき、点Qは原点を通る超球を描く

(ⅱ) 点Pが点Oを通る超平面の面上に存在するとき、点Qは原点を通る超平面を描く(ⅲ)点Pが点Oを通らない超球の表面に存在するとき、点Qは原点を通らない超球を描く

(ⅳ) 点Pが点Oを通る超球の表面に存在するとき、点Qは原点を通らない超平面を描く

証明は以下のとおりである

(ⅰ)の証明

まずは反転の定義より、基準球の中心Oの位置によってその性質が変化することはなく、従って基準球の中心Oを原点に置いたものについてさえ証明すれば平行移動によってその空間上でその性質が成立することは認められる。

よってここでは

$$O = (0,0,\dots,0)\ , P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

とする。

PをOを中心とする半径rの基準球によって反転操作を行った点をQとし、

$$Q = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

とする。

ここでPは半直線OQ上に存在するため、

$$P = kQ(k\text{は定数})$$

より

$$OP \cdot OQ = r^2 \Leftrightarrow kOQ \cdot OQ = r^2 \Leftrightarrow k = \frac{r^2}{OQ^2}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{r^2}{(\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2})^2} \Leftrightarrow k = \frac{r^2}{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}$$

よって

$$P=\left(x_{1,}x_2,\dots,x_n\right)=\frac{r^2}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}(X_1,X_2,\dots,X_n)(ただしX_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\neq 0)\quad\cdots①$$

ここで、原点を通らない超平面

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=s\left(a_1,a_2,\dots,a_n,s は定数\right)\quad\cdots②$$

を考える。ここに先ほど求めた①を代入する

$$②\Rightarrow a_1\frac{r^2X_1}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}+a_2\frac{r^2X_2}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}+\cdots+a_n\frac{r^2X_n}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}=s$$

$$\Leftrightarrow r^2(a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n)=s(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)$$

$$\Leftrightarrow\left\{\left(X_1-\frac{r^2a_1}{2s}\right)^2+\left(X_2-\frac{r^2a_2}{2s}\right)^2+\cdots+\left(X_n-\frac{r^2a_n}{2s}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{r^4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}{4s^2}$$

よって原点を通る超球の表面(原点を除く)を表す■

(ⅱ)の証明

(ⅰ)と同様に原点を通る超平面

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0\left(a_1,a_2,\dots,a_n は定数\right)\quad\cdots③$$

を考える。ここに先ほど求めた①を代入する

$$③\Rightarrow a_1\frac{r^2X_1}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}+a_2\frac{r^2X_2}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}+\cdots+a_n\frac{r^2X_n}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}=0$$

$$\Leftrightarrow r^2(a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n)=0$$

$$\Leftrightarrow a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n=0$$

よって原点を通る同一超平面(原点を除く)を表す■

(ⅲ)の証明

(ⅰ)と同様に原点を通らない超球

$$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2=s^2\quad\cdots④$$

を考える。ここに①を代入すると

$$\left(\frac{r^2X_1}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}-a_1\right)^2+\left(\frac{r^2X_2}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}-a_2\right)^2+\cdots+\left(\frac{r^2X_n}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}-a_n\right)^2$$

$$=s^2$$

$$\Leftrightarrow\{r^2X_1-a_1(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)\}^2+\{r^2X_2-a_2(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)\}^2+\cdots$$

$$+\{r^2X_n-a_n(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)\}^2=s^2(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)^2$$

$$\Leftrightarrow r^4(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)-2r^2(a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n)(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)+$$

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2-s^2)(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)^2=0$$

ここで $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2-s^2=d$ とする

$$\Leftrightarrow r^4-2r^2(a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n)+d(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)\ =0\cdots⑤$$

$$\Leftrightarrow\left(X_1-\frac{r^2a_1}{d}\right)^2+\left(X_2-\frac{r^2a_2}{d}\right)^2+\cdots+\left(X_n-\frac{r^2a_n}{d}\right)^2=\frac{r^4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2-d)}{d^2}=\frac{r^4s^2}{d^2}$$

よって原点を通らない超球の表面を表す■

(ⅳ)の証明

⑤の式のうち原点を通るもの(d=0)を考えると

$$⑤\Leftrightarrow r^4-2r^2(a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n)=0$$

$$\Leftrightarrow a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n=\frac{r^2}{2}$$

よって原点を通らない超平面を表す■

2.3 結果から見える性質

上に挙げた証明の結果の式から(ⅰ)のような場合では、反転後の超球の中心の座標は $O'=\frac{r^2}{2s}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$であることから、反転前の超平面に対して原点からおろした垂線の足を H とすると、半直線 OH上に反転後の超球の中心が存在することが分かる。その球の半径は OO'に等しいため、OH の長さと基準球の半径に依存していることも分かる。特に、基準球の半径 r=1 の場合この結果を得る。

$$\text{反転後の超球の半径}=\frac{1}{2OH}$$

3 n 次元における n 次超球の体積の導出

3.1 方針

ここでは n 次元での超球の体積の導出に入る前に、まず私がこのテーマを思いつくもととなった平面での円周の長さを反転を用いて表すことをした後、n 次元での超球の体積の導出を行いたいと思う

3.2 円周の長さの導出

まず、基準円の半径を 1 とし、その中心を原点に置くものとする。

この時、反転の結果として半径 r の円を得るためには原点を通らない直線を書く必要があるが、その直線の原点からの距離を L とすると r=1/2L を満たすように L をとる必要がある。
そのような直線の 1 つは

$$x = \frac{1}{2r}$$

である。上の直線上の点 P$\left(\frac{1}{2r}, y\right)$を反転させた点 Q は

$$Q = \left(\frac{\frac{1}{2r}}{\frac{1}{4r^2}+y^2}, \frac{y}{\frac{1}{4r^2}+y^2}\right)$$

となる。ここで、P における y を微小量変化させたときの Q の変量を求めると

$$Q\frac{d}{dy} = \left(\frac{\frac{1}{2r}}{\frac{1}{4r^2}+y^2}, \frac{y}{\frac{1}{4r^2}+y^2}\right)\frac{d}{dy} = \left(\frac{-\frac{1}{r}y}{\left(\frac{1}{4r^2}+y^2\right)^2}, \frac{-y^2+\frac{1}{4r^2}}{\left(\frac{1}{4r^2}+y^2\right)^2}\right)$$

よって、P における y を微小量変化させたときの Q の変量の大きさは

$$\sqrt{\left(Q\frac{d}{dy}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-\frac{1}{r}y}{\left(\frac{1}{4r^2}+y^2\right)^2}, \frac{-y^2+\frac{1}{4r^2}}{\left(\frac{1}{4r^2}+y^2\right)^2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4r^2}+y^2}$$

よって、この P を直線$x = \frac{1}{2r}$全体で動かした結果として Q の軌跡が半径 r の円となるので、その長さを求めると

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{4r^2}+y^2}dy = 2\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{4r^2}+y^2}dy$$

ここで$y = \frac{1}{2r}\tan\theta$と置換すると

$$\Leftrightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{1}{4r^2}+\left(\frac{1}{2r}\tan\theta\right)^2}\frac{dy}{d\theta}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{1}{4r^2}(\tan^2\theta+1)}\frac{dy}{d\theta}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{\frac{1}{4r^2}}\frac{\frac{1}{2r}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2r\,d\theta = 4r\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta = 2\pi r$$

よって半径 r の円の円周の長さは 2πr となる

3.3 n 次空間における反転後の体積の関係

ここから n 次超球の体積の導出に入る。

まず、基準球の半径を 1 とし、中心を原点 O とする。
ここでまず n 次の体積を得るための下準備として
空間上のある点 $P(x_{1,}x_2,\dots,x_n)$ と、P を基準球によって反転させた
点 $Q\left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2},\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2},\dots,\frac{x_n}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\right)$ の対応関係を考える。
ここで P の各座標成分を微小に変化させたときの Q の変量を求めると

$$Q\frac{d}{dx_1}=\left\{\frac{-x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2},\frac{-2x_2x_1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2},\dots,\frac{-2x_nx_1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2}\right\}$$

$$Q\frac{d}{dx_2}=\left\{\frac{-2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2},\frac{x_1^2-x_2^2+\cdots+x_n^2}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2},\dots,\frac{-2x_nx_2}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2}\right\}$$

$$\vdots$$

$$Q\frac{d}{dx_n}=\left\{\frac{-2x_1x_n}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2},\frac{-2x_2x_n}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2},\dots,\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2-x_n^2}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2}\right\}$$

ここで、上の ｘ $_1$ を変化させたときの微小変化のベクトルと、 ｘ $_2$ を変化させたときのベクトルの内積を考えると

$$Q\frac{d}{dx_1}\cdot Q\frac{d}{dx_2}$$

$$=\left\{\frac{-x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2},\frac{-2x_2x_1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2},\dots,\frac{-2x_nx_1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2}\right\}\cdot$$

$$\left\{\frac{-2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2},\frac{x_1^2-x_2^2+\cdots+x_n^2}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2},\dots,\frac{-2x_nx_2}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^4}\{(-x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(-2x_1x_2)+(-2x_1x_2)(x_1^2-x_2^2+\cdots+x_n^2)$$
$$+(-2x_3x_1)(-2x_3x_2)+\cdots+(-2x_nx_1)(-2x_nx_2)\}$$

$$=\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^4}\{-4x_1x_2(x_3^2+x_4^2+\cdots+x_n^2)+4x_1x_2(x_3^2+x_4^2+\cdots+x_n^2)\}$$

$=0$

よってこれらの 2 ベクトルは直交する。ここで、式の対称性より上に挙げた P の各座標成分を微小に変化させたときの Q の変量ベクトルのいずれの 2 ベクトルも同様の計算により直交することが分かる。

次に P の各座標成分を微小に変化させたときの Q の変量ベクトルの大きさを求めると

$$\left|Q\frac{d}{dx_1}\right| = \left|\frac{-x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2}, \frac{-2x_2x_1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2}, \dots, \frac{-2x_nx_1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2}\right|$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{-x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2}\right\}^2 + \left\{\frac{-2x_2x_1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2}\right\}^2 + \cdots}$$

$$+\left\{\frac{-2x_nx_1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2}\right\}^2 = \frac{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2} = \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}$$

式の対称性より、いずれの変量ベクトルについても同様の計算結果を得る。

よって、いずれの 2 ベクトルも直交することと、その大きさから、点 P の体積の変量に対する点 Q の体積の変量の微分係数は

$$\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^n}$$

と求められる。

よってこの計算結果をもとに n 次超球の体積を考えていくことにする。

3.4 n 次超球の体積の導出

まず、反転の結果として半径 r の n 次超球を得るような超平面の一つとして

$$x_1 = \frac{1}{2r}$$

を得る。このとき、反転後の超球の内部は空間上の集合$\left(x_1 > \frac{1}{2r}\right)$を反転したものである。

よって超球の体積を V とすると V は

$$V = \int_{\frac{1}{2r}}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^n}dx_1dx_2dx_3\dots dx_n$$

$$= 2^{n-1}\int_{\frac{1}{2r}}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\dots\int_{0}^{\infty}\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^n}dx_1dx_2dx_3\dots dx_n$$

となる。

ここでひとまず次の積分を考える

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_\alpha^2)^\beta}dx_\alpha$$

$x_\alpha = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{\alpha-1}^2}\tan\theta$ と置換すると

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{\alpha-1}^2)(1+\tan^2\theta)\}^\beta} \frac{dx_\alpha}{d\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left\{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{\alpha-1}^2)\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\right\}^\beta} \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{\alpha-1}^2}}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{\alpha-1}^2)^{\beta-\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(\beta-1)}\theta \, d\theta \ldots ⑥$$

ここで、ウォリス積分と呼ばれる形である

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta \, d\theta$$

については以下のことが知られている

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} & (\text{n が偶数}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & (\text{n が奇数}) \end{cases}$$

証明は以下の通りである

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta \, (sin\theta)' d\theta$$

$$= [\cos^{n-1}\theta \, (sin\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\cos^{n-2}\theta \, (-sin^2\theta) d\theta$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\theta \, (1-\cos^2\theta) d\theta = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

この漸化式と

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2} \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta = 1$$

より、

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} & (\text{n が偶数}) \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & (\text{n が奇数}) \end{cases} \ldots ⑦$$

よって、⑦を⑥に代入すると

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_\alpha^2)^\beta} dx_\alpha$$

$$=⑥=\begin{cases}\dfrac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{\alpha-1}^2)^{\beta-\frac{1}{2}}}\dfrac{(2\beta-3)!!}{(2\beta-2)!!}\dfrac{\pi}{2}\,(2\beta\text{が偶数})\\ \dfrac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{\alpha-1}^2)^{\beta-\frac{1}{2}}}\dfrac{(2\beta-3)!!}{(2\beta-2)!!}\,(2\beta\text{が奇数})\end{cases}\quad\cdots⑧$$

この結果を用いて再び最初の n 次超球の体積の式を表すと

$$V=2^{n-1}\int_{\frac{1}{2r}}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^n}dx_1dx_2dx_3\ldots dx_n\text{-}$$

$$=2^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{\frac{1}{2r}}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2)^{n-\frac{1}{2}}}dx_1dx_2dx_3\ldots dx_{n-1}$$

$$=2^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{(2n-4)!!}{(2n-3)!!}\int_{\frac{1}{2r}}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-2}^2)^{n-1}}dx_1dx_2dx_3\ldots dx_{n-2}$$

同様に計 n-1 回　⑧を V の式に用いると次の式を得る

$$V=2^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{(2n-4)!!}{(2n-3)!!}\cdots\frac{(n-1)!!}{n!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\int_{\frac{1}{2r}}^{\infty}\frac{1}{x_1^{n+1}}dx_1$$

$$=2^{n-1}\frac{(n-1)!!}{(2n-2)!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left[-\frac{1}{nx_1^n}\right]_{\frac{1}{2r}}^{\infty}=2^{n-1}\frac{(n-1)!!}{2^{n-1}(n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{n}(2r)^n$$

$$=\frac{1}{n!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}(2r)^n$$

よって

n 次空間の半径 r の n 次超球の体積 V は

$$V=\frac{1}{n!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}(2r)^n$$

表面積は上の V の式の x $_1$ の座標を$\frac{1}{2r}$に固定することで求めることができるので

表面積 S は

$$S=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{4r^2}+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)^{n-1}}dx_2dx_3\ldots dx_n$$

$$=2^{n-1}\frac{(n-3)!!}{(2n-4)!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{\left(\frac{1}{4r^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}=\frac{2}{(n-2)!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}(2r)^{n-1}$$

この結果は上の体積の式を半径 r について微分することでも得ることができる

よって

n 次空間の半径 r の n 次超球の表面積 S は

$$S = \frac{2}{(n-2)!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}(2r)^{n-1}$$

4 結果と考察

結果として上に挙げたような 2 つの式がこの研究の主な成果となった。改めてこの式について考えると、体積や表面積はもともとの予想通り半径に比例することが分かる。また、偶数次の場合は係数の二重階乗の部分もきれいな形となり、π の出て来る周期も 2 次元ごとであるということはかなり興味深い。このことから推測するに、高次元において次元が二つ上がるということは一つ上がることと比べ何か特別な意味合いを持つように感じる。しかし現状ではその意味合いに対して有意義な答えを見つけられそうに無いため、引き続き研究が必要だと感じた

5 感想と今後の課題

この反転幾何を用いて何かしようと考えていた当初はこの研究のような高次元空間での反転など一切思いついてもおらず、全く別の方向を向いていたため、このような研究に収まったのは自分でもかなり驚いている。計算の途中では全く知らなかったウォリス積分にこのような形で出会い助けられたのは数学の分野同士の意外な関わり合いの一端が見えた気がしてとても面白かった。今後の課題としてはこの空間における反転のまた新たな活用法を見つけることが課題となるだろう

参考文献

[1]https://hiraocafe.com/note/wallis.html おいしい数学　ウォリス積分　2023/9/3 閲覧