美しい旋律の構造とコラッツ数列の規則性の類似

学校法人角川ドワンゴ学園 S 高等学校 1 年　丸山 優佳

概要

音楽の中で，旋律の 1 音目はさまざまな音が用いられ作曲されます．しかし，曲の終わりは主音・主和音であることが多いことから，最終的に 1 となるコラッツ予想の数列との類似性を分析できるのではないかと考えました．美しい旋律の響きがなぜコラッツ数列につながるのか，結果を紹介しながら音楽の調和が作る，美しい数の世界を示します．

1　はじめに

ピタゴラス音律の旋律 7 音は，全音・半音がそれぞれ一定となり，振動数が 2 倍となる 1 オクターブ内にぴったりと収まります．完全 5 度を重ねることは，3 倍音を重ねることと同じといえることから，2^n となる主音で閉じるピタゴラス音律とコラッツ予想の類似について調べました．極座標上に表した整数倍音の中での 3 倍音の調和する音と，導音が主音で美しく解決するときの半音との関連を考えることで，コラッツ数列が 1 に到達していくことを分析しました．

整数倍音，対数関数，対数螺旋が作る音の世界から，コラッツ予想を検証します．

2　背景

2.1　ピタゴラス音律

ある音の振動数を 1 の基準とした場合，2 倍した音は 1 オクターブ高く，3 倍した音は 1 オクターブと完全 5 度高い音になります．振動数比が 2: 3 となる完全 5 度を，基準音から 6 回分（長調の場合は下に 1 回，上に 5 回）重ねてできる 7 音を 1 オクターブ内に並べ替えます．こうしてできる音階は，隣り合う 5 個の全音・2 個の半音の比率がそれぞれ一定でなめらかにつながり，1 オクターブを 1: 2 の完全 8 度で閉じることができます [1].

$$\left(\frac{9}{8}\right)^5 \times \left(\frac{256}{243}\right)^2 = 2 \tag{1}$$

このように，ピタゴラス音律の 7 音は，2: 3 の音の波によって，連なる旋律の音が美しく響くような構造になっています．

しかし，ただ単に完全 5 度を上に 12 回繰り返しただけでは，1 オクターブを閉じることはできません．基準の音をドとすると，12 回目に表れるドは，

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} = 1.0136\ldots \tag{2}$$

となり，基準のドより約 1.0136 倍高い音になります．3^{12} の音を 1 オクターブ内で表すために，2^{19} で割ることにより 19 オクターブ下げています．

この 12 回目のドの値を，対数関数を用いて 1 オクターブ 1200 セントで表します．これは，管弦楽のチューニングなどで広く用いられるチューナーの表示方法です．100 セントごとに平均率の半音をあらわすことができます．平均率はオクターブの比率は整数比 1: 2 になりますが，100 セントごとの半音は $1: 2^{\frac{1}{12}}$ です．

$$\begin{aligned} 1200 \log_2 \frac{3^{12}}{2^{19}} &= 1200\,(12 \log_2 3 - 19) \\ &= 23.46\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

完全 5 度を 12 回繰り返した音は，はじめのドより約 23.46 セント高い音になり，1 オクターブは閉じません．

美しい旋律のために，ピタゴラスは 1 オクターブの音階を 12 個の完全 5 度や 12 個の半音ではなく，5 個の全音と 2 個の半音を組み合わせた 7 音で区切りました．ピタゴラス音律 は，2: 3 という小さな整数比の音の波が互いに調和しながら，2^n の主音を基として美しい旋律を奏でることができる音律といえます．

2.2　倍音

フルートの 1 音には整数倍の倍音が含まれています [1]．1 つの運指で第 1～第 4 倍音まで鳴らすことができ，3 オクターブの音域は，息のスピードと唇でコントロールしながら演奏します．第 2 倍音は 1 オクターブ上の音，第 3 倍音は基音から 1 オクターブと完全 5 度の音，第 4 倍音は基音から 2 オクターブ上の音です．

図 1 より，倍音の大きさは，第 1 > 第 2 > 第 4 倍音の順となり，基音があらわれます．続いて，第 3 倍音と第 5 倍音がほぼ同じ大きさであらわれます．小さい整数同士の第 1・第 3・第 5 倍音は，よく調和するため純正率と呼ばれ，和音に使われます．さらに第 6 倍音，第 10 倍音と続くことがスペクトルからわかります．
（使用楽器：村松フルート DS モデル）

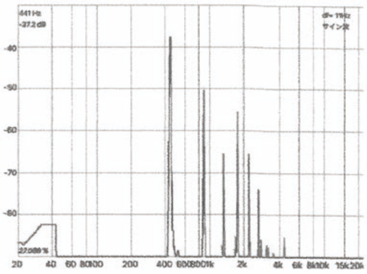

図 1: フルートのラのスペクトル

表 1 の第 2 倍音以上の音は，極座標の角度をシンプルにするために 1 オクターブ内で表しています．対数の値が $0 \leq p < 1$ となるように，オクターブ下げることで，全ての倍音は 1 回転未満の角度として表せることがわかります．

表 1: フルートのラの倍音

倍音	音	振動数 [Hz]	対数関数 $\log_2 M - \log_2 2^n$	$= p$	偏角 $\theta = 360p[°]$	極座標 (距離 r, $\theta = 2\pi p$)
基音	ラ	442	$\log_2 1$	$= 0$	0	$(1, 0)$
第 2 倍音	ラ	884	$\log_2 2 - \log_2 2$	$= 0$	0	$(2, 0)$
第 3 倍音	ミ	1326	$\log_2 3 - \log_2 2$	$= 0.5850$	210.59	$(3, 2\pi(\log_2 3 - 1))$
第 4 倍音	ラ	1768	$\log_2 4 - \log_2 4$	$= 0$	0	$(4, 0)$
第 5 倍音	ド♯	2210	$\log_2 5 - \log_2 4$	$= 0.3219$	115.89	$(5, 2\pi(\log_2 5 - 2))$
第 6 倍音	ミ	2652	$\log_2 6 - \log_2 4$	$= 0.5850$	210.59	$(6, 2\pi(\log_2 3 - 1))$
第 10 倍音	ド♯	4420	$\log_2 10 - \log_2 8$	$= 0.3219$	115.89	$(10, 2\pi(\log_2 5 - 2))$

ドを基音とした場合，倍音の音と振動数の値は表 1 とは異なりますが，対数関数の計算方法は同じです．ドの倍音を極座標で表すと図 2 になります．音は 1 オクターブで振動数が 2 倍になり，1 回転 $= 2\pi$（ラジアン）で同じ音に戻るため，対数螺旋は，$r = 2^{\frac{\theta}{2\pi}}$ と表すことができます．（素数は，度数法を用いた偏角を HSV の色の表示方法で表しています）

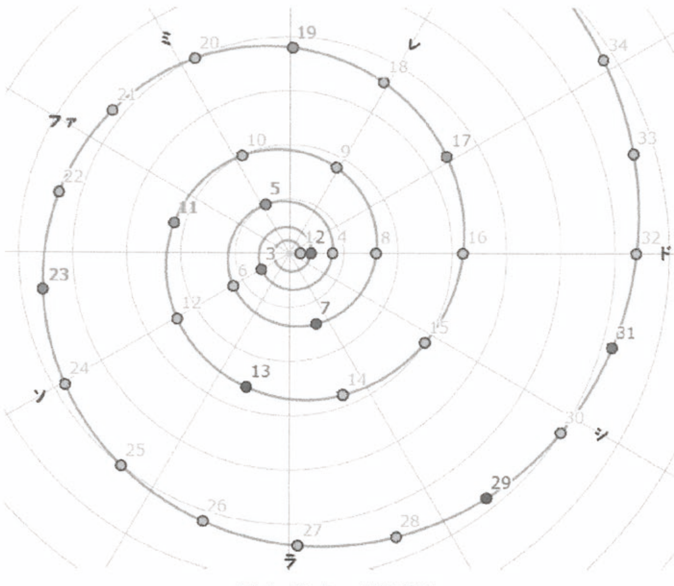

図 2: 倍音の対数螺旋

- 関数 $y = \log_2 x$ は底 2 で，単調に増加する関数です．倍音の点は対数螺旋に沿って等間隔に並んでいます．
- 奇数倍音は新しい音になりますが，偶数倍音は極と奇数倍音を結ぶ半直線上にあるため，新しい音にはならないことがわかります．

2.3 コラッツ予想とは

2022年4月の『数学セミナー』に，小林銅蟲漫画・関真一朗監修「せいすうたん（第2部）/ コラッツ予想」が掲載されています [2].

コラッツ写像 $\mathrm{Col} : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$

$$\mathrm{Col}\,(N) : = \begin{cases} N/2\,(N \equiv 0 \pmod 2) \\ 3N+1\,(N \equiv 1 \pmod 2) \end{cases} \tag{4}$$

つまり，正整数に対して

- 偶数なら2で割り
- 奇数なら3倍して1を足す

このとき任意の正整数 N に対して有限回この操作を繰り返すと $\cdots$ 必ず1に到達する という主張がコラッツ予想だとあります．正の整数が必ず1に到達するかどうかは，まだ十分にわかっていない未解決問題とされています．

3 結果

コラッツ数列の動きを図2の倍音の対数螺旋で見ていくと，$\div 2$ の動き，$\times 3$ の動き，$+1$ の動きに分けて扱うことが良いとわかります．この3種類の動きは角度で表すことができ，それぞれの規則性を調べることで，コラッツ数列が1に到達することを示すことができるのではないかと考えました．

この研究では，角度は対数で表します．度数法では360倍，弧度法では 2π 倍することで表現することができます．また，2^n 倍音のドが並ぶ x 軸の始線からの角度を偏角と表します．

3.1 $\div 2$ のオクターブ変化

図1より，mf の音量（楽に音を鳴らすことができる，一般的に心地よい音量）のフルートの1音には，約10倍音までの整数倍音が含まれていました．もっとたくさんの倍音を表すことができるとしたら，と考えたのが図2の倍音の対数螺旋です．正の整数を極からの距離，基音ドからの偏角を対数関数で表し，点をプロットしています．

図2の対数螺旋から，$\times 2^n$ 倍，$\div 2^n$ 倍の音はオクターブ変化になることがわかります．

第 2^n 倍音は，n オクターブ高い音になり，

$$\log_2 2^n = n \tag{5}$$

第 $\dfrac{1}{2^n}$ 倍音は，n オクターブ低い音になります．

$$\log_2 2^{-n} = -n \tag{6}$$

$\times 2^n$ 倍音，$\div 2^n$ 倍音は同じ音名で，偏角が変化しないことがわかります．

3.2 くるくる回る $\times 3$

図3: 9小節目からのコラール

音楽とコラッツ予想との共通点について考えてみます．

ヨハン・ゼバスティアン・バッハ『主よ，人の望みの喜びよ』[3] は，今からちょうど300年前の1723年に作曲されました．教会カンタータ BWV147 のコラールとして特に有名で，さまざまな楽器にアレンジされるなど広く親しまれています．ト長調で書かれ，主和音の上にモチーフとなる旋律が3連符でソラシレドと始まります．9小節目からのコラールの旋律は，長3度シからシドレレと始まります．

曲の最後の旋律の音は導音ファ♯から主音ソ，主和音ソシレとなって終わります．コラールの旋律が長3度シから始まり，最後は導音ファ♯から主音ソで曲が終わるということは，コラッツ数列がくるくると対数螺旋をめぐりながら，最後の $+1$ で 2^n 倍音となり，1の主音で終わることと似ています．

図 4: 67 小節目から曲の終わり

旋律のピタゴラス音律の長3度のシの音は，主音1のソに対して $3^4 = 81$ となる数です．81 からスタートしたコラールが，最後はト長調の主音ソの1の音に戻り曲が終わるように，コラッツ数列がさまざまな数をたどって1に戻ることとの類似点を考えました．

3.2.1 $N = 27$ のときの 41 回の $\times 3$ のステップ

第3倍音は，1オクターブと完全5度高い音です．1オクターブの角度は 360° なので，完全5度について考えると，

$$360\,(\log_2 3 - 1) = 360 \times 0.5849625 \cdots = 210.59\ldots$$

となり，約 210.59° の角度で表すことができます．例えばドに対してのソや，ソに対してのレになります．

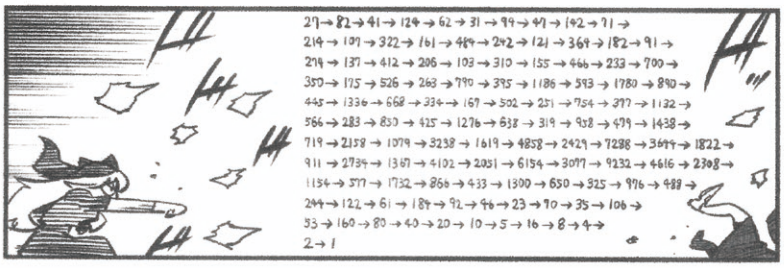

図 5: 「せいすうたん（第2部）/ コラッツ予想」より $N = 27$ の 111 回のステップ

雑誌『数学セミナー』の「せいすうたん（第2部）」に $N = 27$ のステップが描かれています [2]．111 回のステップで重要なのは 41 回あらわれる $\times 3 + 1$ です．倍音の対数螺旋において，3倍音は角度が一定です．ドの完全5度はソ，ソの完全5度はレ，レの完全5度はラ，ラの完全5度はミというように，完全5度でピタゴラス音律を考えることと同じです．

ドを1としたとき，$27 = 3^3$ はピタゴラス音律のラの音です．ピタゴラス音律の第6音は，平均率より約6セント高い音です．

$N = 27$ に3倍音を 41 回重ねたときの偏角を考えます．

$$\begin{aligned} \log_2 27 + 41 \log_2 3 &= \log_2 \left(3^3 \times 3^{41}\right) \\ &= 44 \log_2 3 \end{aligned} \tag{7}$$

小数で表すと，約 69.7383 となります．整数はオクターブ変化なので，小数点以下を使ってセント表示にすると，

$$1200\,(44 \log_2 3 - 69) = 886.02\ldots \tag{8}$$

平均率のラが 900 セントなので，886.02 セントはチューナーでは“A（ラ）−14 セント”と表示されます．

3倍音は角度が一定であることから，任意の正の整数 N を有限回3倍することは，偏角で表すことができます．

3.3　+1 について

+1 の回数は ×3 の回数と同じです．$N \times 3^n$ の偏角を ①，n 回分の +1 の角度 ② とすると，① + ② が整数になればコラッツ数列が 1 に到達すると示すことができます．式 (5) のように，整数 m は $\log_2 2^m$ という意味なので，1 の m オクターブ上の数を 2 で割り続けると 1 に到達することができます．

図 2，図 6 を見ると，+1 の角度はさまざまであることがわかります．例えば，1 + 1 の偏角はドのオクターブ変化になりますが，2 + 1 の偏角はドから完全 5 度のソ，8 + 1 の偏角はドからピタゴラス音律のレになります．

まずは，ステップ数が小さいときの +1 の規則性から順番に考えていきます．

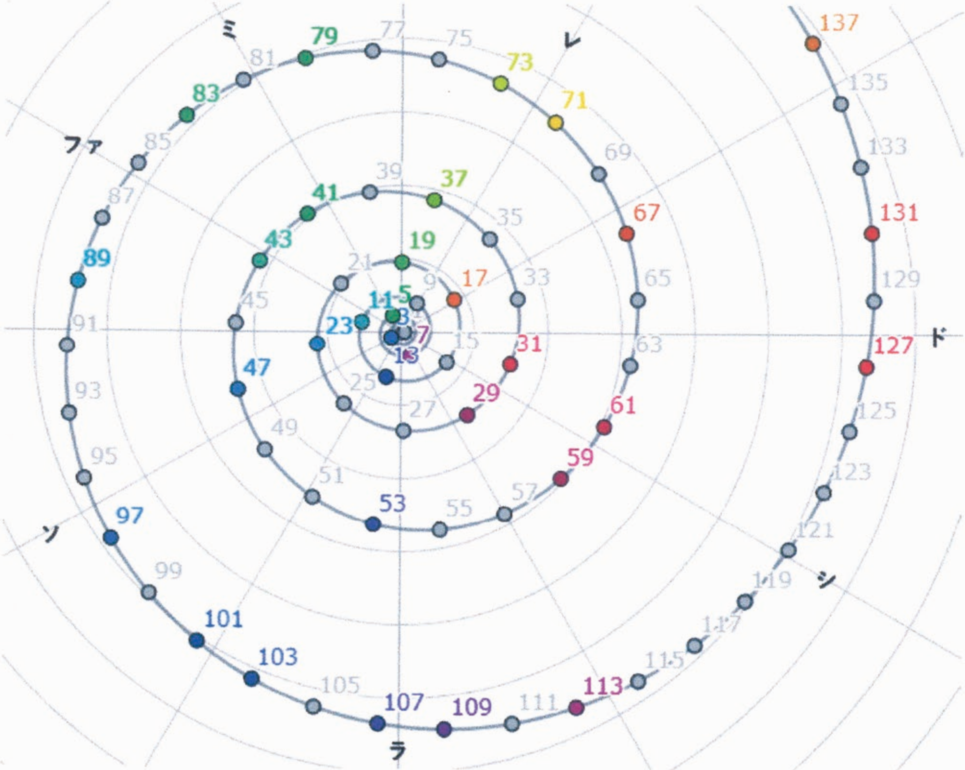

図 6: 倍音の対数螺旋（奇数）

3.3.1　$N = 5$ のとき

$N = 5$ のステップについて考えてみます．×3 + 1 (▶) は 1 回です．5 倍音はハ長調の主和音の第 3 音，15 倍音は属和音の第 3 音です．ド: ミ : ソ = ソ : シ : レ = 4: 5: 6 の振動数の比で表される純正率のミとシの音です．

$$5 \blacktriangleright 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

5 × 3 を対数の偏角で表すと，

$$\log_2 5 + \log_2 3 = \log_2 15 \qquad \cdots ① \tag{9}$$

となり，1 回分の +1 の角度は，

$$\begin{aligned} \log_2 16 - \log_2 15 &= \log_2 2^4 - \log_2 15 \\ &= 4 - \log_2 15 \qquad \cdots ② \end{aligned} \tag{10}$$

① + ② は，

$$\log_2 15 + 4 - \log_2 15 = 4 \tag{11}$$

と計算できます．① + ② の値が整数になることから，基音 1 の 4 オクターブ上の音となることが分かり，$N = 5$ のコラッツ数列は 1 に到達すると計算できました．

3.3.2 $N=7$ のとき

もう少しステップ数が大きい $N=7$ の場合を考えてみます．+1 の回数は 5 回です．

$$7 \blacktriangleright 22 \to 11 \blacktriangleright 34 \to 17 \blacktriangleright 52 \to 26 \to 13 \blacktriangleright 40 \to 20 \to 10 \to 5 \blacktriangleright 16 \to \cdots \to 1$$

7×3^5 を対数の偏角で表すと，

$$\log_2 7 + 5\log_2 3 = \log_2 1701 \qquad \cdots ① \tag{12}$$

となり，5 回分の +1 の角度は，

$$\begin{aligned}
&\log_2 22 - \log_2 21 + \log_2 34 - \log_2 33 + \log_2 52 - \log_2 51 + \log_2 40 - \log_2 39 + \log_2 16 - \log_2 15 \\
&= \log_2 \frac{22 \times 34 \times 52 \times 40 \times 16}{21 \times 33 \times 51 \times 39 \times 15} \\
&= \log_2 \frac{2048}{1701} \\
&= \log_2 2^{11} - \log_2 1701 \\
&= 11 - \log_2 1701 \qquad \cdots ②
\end{aligned} \tag{13}$$

① + ② は，

$$\log_2 1701 + 11 - \log_2 1701 = 11 \tag{14}$$

と計算できます．① + ② の値が整数になることから，基音 1 の 11 オクターブ上の音となることが分かり，$N=7$ のコラッツ数列は 1 に到達すると計算できました．

3.3.3 分数の約分からわかること

$N=7$ のときの，式 (13) についてもう少し詳しく見てみると，

$$\log_2 \frac{22 \times 34 \times 52 \times 40 \times 16}{21 \times 33 \times 51 \times 39 \times 15} = \log_2 \frac{2 \times 34 \times 52 \times 40 \times 16}{21 \times 3 \times 51 \times 39 \times 15} \tag{15}$$

$$= \log_2 \frac{2 \times 2 \times 4 \times 8 \times 16}{21 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} \tag{16}$$

$$= \log_2 \frac{2^{11}}{7 \times 3^5} \tag{17}$$

$$= 11 - \log_2 7 - 5\log_2 3 \tag{18}$$

と計算できます．

式 (15) の分数部分だけを見ていくと，22 倍音は ÷2 で 1 オクターブ下がった後，3 倍されることから，

$$22 : 33 = 2 : 3$$

となります．分子の 22 と斜め下の分母 33 が約分されます．完全 5 度の音程となっていることがわかります．

式 (16) も同様に，斜めの数同士を約分していきます．式 (17) は分子には 2 が残り，分母には N と 3 が残ります．

正の整数を N，$\times 3+1$ の回数を n，基音 1 の m オクターブ上の音を m とすると，
N に 3 倍音を n 回掛けた数，$N \times 3^n$ の偏角は，

$$\log_2 (N \times 3^n) = \log_2 N + n\log_2 3 \qquad \cdots ① \tag{19}$$

式 (17) (18) より，n 回分の +1 の角度は，

$$\log_2 2^m - \log_2 (N \times 3^n) = m - \log_2 N - n\log_2 3 \qquad \cdots ② \tag{20}$$

と表すことができるとわかります．
したがって，① + ② は，

$$\log_2 N + n\log_2 3 + m - \log_2 N - n\log_2 3 = m \tag{21}$$

① + ② は整数 m になり，基音 1 の m オクターブ上の音となることから，コラッツ数列は 1 に到達すると計算できました．

3.3.4 $N = 27$ のとき

式 (7) より，27×3^{41} の偏角は $44 \log_2 3$ とわかりました（①）．41 回分の $+1$ の角度（②）と合わせた値が整数になれば，$N = 27$ のときのコラッツ数列は 1 に到達するといえます．

式 (20) より，② の式は次のように予想されます．

$$\begin{aligned} \log_2 2^m - \log_2 \left(27 \times 3^{41}\right) &= m - \log_2 \left(3^3 \times 3^{41}\right) \\ &= m - 44 \log_2 3 \qquad \cdots ② \end{aligned} \tag{22}$$

① + ② は，

$$44 \log_2 3 + m - 44 \log_2 3 = m \tag{23}$$

整数 m を導くことができ，$N = 27$ のコラッツ数列は 1 に到達すると示すことができるはずです．

実際に 41 回分の $+1$ の角度（②）を計算で確かめてみます．

$$\begin{aligned} \log_2 \Biggl(& \frac{82 \times 124 \times 94 \times 142 \times 214 \times 322 \times 484 \times 364 \times 274 \times 412 \times 310 \times 466 \times 700 \times 526}{81 \times 123 \times 93 \times 141 \times 213 \times 321 \times 483 \times 363 \times 273 \times 411 \times 309 \times 465 \times 699 \times 525} \\ & \frac{790 \times 1186 \times 1780 \times 1336 \times 502 \times 754 \times 1132 \times 850 \times 1276 \times 958 \times 1438 \times 2158 \times 3238}{789 \times 1185 \times 1779 \times 1335 \times 501 \times 753 \times 1131 \times 849 \times 1275 \times 957 \times 1437 \times 2157 \times 3237} \\ & \frac{4858 \times 7288 \times 2734 \times 4102 \times 6154 \times 9232 \times 1732 \times 1300 \times 976 \times 184 \times 70 \times 106 \times 160 \times 16}{4857 \times 7287 \times 2733 \times 4101 \times 6153 \times 9231 \times 1731 \times 1299 \times 975 \times 183 \times 69 \times 105 \times 159 \times 15} \Biggr) \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} = \log_2 \Biggl(& \frac{2 \times 4 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 2 \times 4 \times 2 \times 2 \times 4 \times 2}{81 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} \\ & \frac{2 \times 2 \times 4 \times 8 \times 2 \times 2 \times 4 \times 2 \times 4 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} \\ & \frac{2 \times 8 \times 2 \times 2 \times 2 \times 16 \times 4 \times 4 \times 16 \times 8 \times 2 \times 2 \times 32 \times 16}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} \Biggr) \end{aligned} \tag{25}$$

$$= \log_2 2^{70} - \log_2 3^{44} \tag{26}$$

$$= 70 - 44 \log_2 3 \qquad \cdots ② \tag{27}$$

① + ② は，

$$44 \log_2 3 + 70 - 44 \log_2 3 = 70 \tag{28}$$

整数 70 を導くことができ，$N = 27$ のコラッツ数列は 1 に到達すると示すことができました．

3.4 回って戻る $\times 3 - 1$

コラッツ予想に似ている形を調べることで，コラッツ数列では起こらないとされるループについて考えました．

正の整数に対して，

- 偶数なら 2 で割る
- 奇数なら 3 倍して 1 を引く

このとき，任意の正の整数 N に対して，有限回この操作を繰り返す．

$N = 20$ までの数を計算してみると，1 に到達する N と，ループする N があることがわかります．

3.4.1 1 に到達する $N = 15$

1 より大きい奇数 N を考えると，1 に到達する数は $N = 3$，11，15 があります．$N = 15$ は $\times 3 - 1$ ($\triangleright$) が 2 回です．

$$15 \triangleright 44 \to 22 \to 11 \triangleright 32 \to \cdots \to 1$$

15×3^2 を対数の偏角で表すと，

$$\log_2 15 + 2\log_2 3 \qquad \cdots ① \tag{29}$$

となり，2 回分の -1 の角度は，

$$\begin{aligned}\log_2 \frac{45 \times 33}{44 \times 32} &= \log_2 \frac{45 \times 3}{4 \times 32} \\ &= \log_2 \frac{15 \times 3^2}{2^7} \\ &= \log_2 15 + 2\log_2 3 - 7 \qquad \cdots ②\end{aligned} \tag{30}$$

① − ② は，

$$\begin{aligned}\log_2 15 + 2\log_2 3 - (\log_2 15 + 2\log_2 3 - 7) &= \log_2 15 + 2\log_2 3 - \log_2 15 - 2\log_2 3 + 7 \\ &= 7\end{aligned} \tag{31}$$

と計算できます．① − ② の値が整数になることから，基音 1 の 7 オクターブ上の音となることが分かり，$N = 15$ の数列は 1 に到達すると計算できました．

3.4.2 ループする $N = 17$

ループする数は，$N = 5$，7，9，13，17，19 があります．$N = 7$ の数列は $N = 5$ のループに入ります．また，$N = 9$，13，19 の数列は $N = 7$，5 のループに入ります．

$N = 17$ は $\times 3 - 1$ が 7 回あります．1 に到達する N と何が違うのでしょうか．

$$17 \triangleright 50 \to 25 \triangleright 74 \to 37 \triangleright 110 \to 55 \triangleright 164 \to 82 \to 41 \triangleright 122 \to 61 \triangleright 182 \to 91 \triangleright 272 \to \cdots \to 17$$

17×3^7 を対数の偏角で表すと，

$$\log_2 17 + 7\log_2 3 \qquad \cdots ① \tag{32}$$

となり，7 回分の -1 の角度は，

$$\begin{aligned}\log_2 \frac{51 \times 75 \times 111 \times 165 \times 123 \times 183 \times 273}{50 \times 74 \times 110 \times 164 \times 122 \times 182 \times 272} &= \log_2 \frac{51 \times 3 \times 111 \times 165 \times 123 \times 183 \times 273}{2 \times 74 \times 110 \times 164 \times 122 \times 182 \times 272} \\ &= \log_2 \frac{51 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 4 \times 2 \times 2 \times 272} \\ &= \log_2 \frac{17 \times 3^7}{2^{11} \times 17} \\ &= 7\log_2 3 - 11 \qquad \cdots ②\end{aligned} \tag{33}$$

① − ② は，

$$\begin{aligned}\log_2 17 + 7\log_2 3 - (7\log_2 3 - 11) &= \log_2 17 + 7\log_2 3 - 7\log_2 3 + 11 \\ &= \log_2 17 + 11\end{aligned} \tag{34}$$

と計算できます．① − ② の値は 17 倍音の偏角 + 整数になることから，17 倍音の 11 オクターブ上の音となることが分かり，$N = 17$ の数列はループすると計算できました．

3.4.3　1 に到達する N とループする N のちがい

正の整数を N，$\times 3-1$ の回数を n，m オクターブ上の音を m とすると，
N に 3 倍音を n 回掛けた数，$N \times 3^n$ の偏角は，

$$\log_2 (N \times 3^n) = \log_2 N + n \log_2 3 \qquad \cdots ① \tag{35}$$

式 (30) より，1 に到達する N の n 回分の -1 の角度は，

$$\log_2 N + n \log_2 3 - m \log_2 2 = \log_2 N + n \log_2 3 - m \qquad \cdots ② \tag{36}$$

よって，① − ② は，

$$\begin{aligned} \log_2 N + n \log_2 3 - (\log_2 N + n \log_2 3 - m) &= \log_2 N + n \log_2 3 - \log_2 N - n \log_2 3 + m \\ &= m \end{aligned} \tag{37}$$

① − ② は整数 m となり，基音 1 の m オクターブ上の音となることから，数列は 1 に到達すると計算できました．

また，式 (33) より，ループする N の n 回分の -1 の角度は，

$$\log_2 N + n \log_2 3 - m \log_2 2 - \log_2 N = n \log_2 3 - m \qquad \cdots ③ \tag{38}$$

よって，① − ③ は，

$$\begin{aligned} \log_2 N + n \log_2 3 - (n \log_2 3 - m) &= \log_2 N + n \log_2 3 - n \log_2 3 + m \\ &= \log_2 N + m \end{aligned} \tag{39}$$

① − ③ は N 倍音の m オクターブ上の音になることから，数列はループすると計算できました．

式 (37) と (39) の違いは，(36) には $\log_2 N$ があり，(38) にはありません．式 (30) の分数を見ると分母は 2^m ですが，式 (33) の分母では $2^m \times N$ とあり，分子の N と打ち消し合っています．

図 6 において，1 に到達する $N = 15$ は，純正率のシから出発し完全 5 度を 2 回重ねます (式 (29))．$15 \times 3^2 = 135$ の音はド # より少し低い音になります．つぎに，44 から 45 の角度と 32 から 33 の角度の 2 つの角の大きさ (式 (30)) を 135 から引くと，基音ドの音 $2^7 = 128$ に到達します (式 (31))．この音の動きが 1 に到達する N の数列です．

また，ループする $N = 17$ はド # より少し高い音から出発し，完全 5 度を 7 回重ねます (式 (32))．$17 \times 3^7 = 37179$ の音はレより少し高い音になります．つぎに，50 から 51 の角度，74 から 75 の角度 $\cdots$ などの 7 つの角を合わせた大きさ (式 (33)) を 37179 から引くと，17 のド # の音 $17 \times 2^{11} = 34816$ に戻りループします (式 (34))．この音の動きがループする $N = 17$ の数列です．

4　考察

4.1　コラッツ数列のループについて

コラッツ予想は $N \geq 2$ ではループしないといわれます．

① の式は，正の整数 N を n 回 3 倍するという意味でした．偏角は，$\log_2 N + n \log_2 3$ です．

② の式は，3 倍音ごとにあらわれる $+1$ を合わせた角度という意味でした．ループするためには，式 (17) のように表したときに，分子に N が必要なため，N 倍音のオクターブ上の偶数 $N \times 2^m$ が分子に入ることが必要です．

$$\log_2 \frac{2^m \times N}{N \times 3^n} = m - n \log_2 3 \qquad \cdots ② \tag{40}$$

$\times 3-1$ のループする $N = 17$ の式 (33) のように，分子の N と分母の N が約分されると，コラッツ数列の ② の式は $m - n \log_2 3$ となり，ループする式を導くことができます．実際にそのような N はあるでしょうか．

残念ながら，この研究では明らかにすることはできなかったのですが，1 に到達する数列は，正の整数 N，$\times 3+1$ の回数 n，2^m で表す 1 の m オクターブ上の数となる m の組み合わせが，1 組に定まると言えそうです．

4.2 コラッツ数列の発散について

数列の発散は，式 (17) の分子に 2^n 以外の偶数が入り続けるときに起こると考えられます．

1 に到達することは，+1 の操作で分子に 2^n が入るときに起こり，+1 の操作の直前の 2^n-1 は 3 を約数にもつ奇数となります．このような数は，対数螺旋をみると 2 オクターブごとに無数にあります．3 倍したときにそのようになる数は，純正律のミ以上，完全 5 度下のファ未満の間に 2 オクターブごとに必ずあります．そしてそれらの偏角をもつ数 5×2^n, 85×2^n... などがコラッツ数列にあらわれると，必ず 1 に到達します．さらに，それらから 1 を引いた数が，ピタゴラス音律のレからファまでの間に無数にあり，対数螺旋には 1 に到達するための仕掛けがさまざまあることがわかります．

また，対数螺旋では +1 の角度はすべての数で異なりますが，比が等しいときは角度も等しくなります．例えば，オクターブの音程が等しく感じるように，対数螺旋ではその角度は一定です．式 (12) では，$7\times3^5=1701$ とありますが，

$$1701:1782=21:22$$

のように，ラの近くの 1701 から 1782 までの角度と，ファの近くの 21 から 22 までの角度は等しくなります．離れた音同士でも，比が等しければ角度も等しくなることがわかります．

発散については今回のレポートで十分に考察できませんでしたが，今後の研究で明らかにできたらいいなと思います．

5 おわりに

5.1 結論

音は，完全 5 度を何度繰り返しても 1 オクターブを閉じることができません．しかし，ピタゴラス音律はドから上に完全 5 度を 5 回繰り返し，導音シからドまでの半音で主音に戻り，1 オクターブを閉じました．

去年の研究から，ピタゴラス音律の半音の音程は，コラッツ数列の +1 の角度を合わせたものと考えると，コラッツ予想について何か見えてくるのではないかと思いましたが，いろいろな方向に散らばる +1 の角度をどう表すのか分かりませんでした．今年は，コラッツ数列の動きを音の動きとして示すことができ，イメージしやすくなったのではないかと思います．

ループや発散については，十分な考察ができたとはいえず残念ですが，整数倍音がどこにいて，コラッツ数列がどんな動きをしているのか視覚化できたのはとても嬉しいです．

5.2 感想

バロック音楽のフルートの教本に『フルート奏法試論』という本があります [4]．18 世紀の音楽観について教えてくれる貴重な本です．著者のヨハン・ヨアヒム・クヴァンツは，プロイセンのフリードリヒ大王のフルートの先生ですが，楽器の演奏法に限らず多方面に目をむけ，美しく音楽することを情熱をもって明確に言い表そうとしています．クヴァンツは数学について「音楽をしようとする若い人に真剣にすすめなければならない」，「多くの音楽理解者の間に認められる上述の学問の欠如は，彼等の一層の進歩の障害」と述べています．同時代の数学者オイラーが音楽理論の研究をしたことは有名ですが，クヴァンツは音楽を愛する人に数学の研究をすすめ，音楽の数学的なひろがりについて語っているのが印象的です．

この研究は，最も美しい音楽は何か，という問いから始まりました．物理や数学の視点から，音の美しさには規則性があることがわかりました．ピタゴラス音律や倍音の構造を分析していくことで，数学の未解決問題であるコラッツ予想に，少しだけ触れることができたような気がします．

参考文献

[1] 丸山優佳．"ピタゴラス音律と純正律による音の調和の検証"．算数・数学の自由研究 2021 年度受賞作品．一般財団法人理数教育研究所．https://www.rimse.or.jp/research/past/winner9th.html, (参照 2023-8-18).
[2] 小林銅蟲，関真一朗．"せいすうたん (第 2 部)/コラッツ予想"．数学セミナー．日本評論社, 2022, vol. 61, no. 4-726, p. 2-5.
[3] J. S. BACH. Jesus bleibet meine Freude, Gemischter Chor und Klavier. C. F. PETERS.
[4] ヨハン・ヨアヒム・クヴァンツ．フルート奏法試論 バロック音楽演奏の原理．シンフォニア, 1976.