研究テーマ（タイトル）

k−ナッチ数列を群数列ととらえたときの一般項の考察

国立鹿大附属中 学校 3年 名前 山本創士

1. 研究の動機

フィボナッチ数列を見ていたとき，ある事に気付き，それについて考えると，k−ナッチ数列においても同様のことがいえ，さらに，kが十分に大きい場合においては従来のk−ナッチ数列の一般項よりも有効であるような一般項を見つけることができた。

2. 前提となる知識

そもそも，k−ナッチ数列とは，次のような定義でなされる数列である。

—定義—

k−ナッチ数列 $\{F^{(k)}_n\}$ は

$$F^{(k)}_n = \begin{cases} F^{(k)}_n = 0 & (1 \leqq n \leqq k-1) \\ F^{(k)}_n = 1 & (n = k) \\ F^{(k)}_n = F^{(k)}_{n-1} + F^{(k)}_{n-2} + \cdots + F^{(k)}_{n-k} \end{cases}$$

で与えられる数列である。

$k=2$の場合はフィボナッチ数列という非常に有名な数列になる。

また，今回扱う「群数列」に関しては，次のような形で扱う。

—群数列の形—

数列 $\{P_n\}$ が，

$\{P_n\} = \{P_1, P_2, P_3 \cdots, P_n\}$

という要素を持つとき，いくつかの群に分け，それぞれの数列を $\{Q^m_l\}$（mは，左から何番目の群かを表し，lは群の中で何番目かを表す。ただし，mは0から始まり，lは1から始まる）とする。すなわち

$\{P_n\} = \{Q^0_1, Q^0_2 \cdots Q^0_l \mid Q^1_1, Q^1_2, \cdots, Q^1_l \mid \cdots\}$

という風になる。

3. 研究の内容

最初に,僕が一番初めに気付いた事実を説明する。

フィボナッチ数列を見てみる。フィボナッチ数列とは

$$\{F^2_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 \cdots\}$$

と続いていく数列である。ここで,

$F^2_n = F^2_{n-1} + F^2_{n-2}$ は,定義であり,これを変形して,

$$F^2_{n-1} = F^2_n - F^2_{n-2} \quad \cdots ①.$$

また,定義より,

$$F^2_{n+1} = F^2_n + F^2_{n-1}$$

これに①を代入して,

$$F^2_{n+1} = 2F^2_n - F^2_{n-2}$$

を得ることができる。

この操作をkが一般化した状態で行うと,

$$F^k_n = F^k_{n-1} + \cdots + F^k_{n-k} \Leftrightarrow F_{n-k+1} = F^k_n - (F^k_{n-1} + \cdots + F^k_{n-k+2} + F^k_{n-k}) \cdots ②$$

定義より,

$$F^k_{n+1} = F^k_n + \cdots + F^k_{n-k+1}$$

②を代入して,

$$F^k_{n+1} = 2F^k_n - F^k_{n-k} \quad \cdots ③$$

を得ることができる。しかし,ここまでだと使い勝手が悪いので少し工夫をしてみる。

$\{F^k_n\}$ を,kコずつに分けた群数列を考える。すると,次のような対応になる。

$$\{F^k_n\} = \{F^k_1, F^k_2, \cdots, F^k_k, F^k_{k+1} \cdots, F^k_{2k}, \cdots\}$$
$$= \{G^0_1, G^0_2, \cdots, G^0_k \mid G^1_1, \cdots, G^1_k \mid \cdots\}$$

という風になる。ただし,群数列を $\{G^m_n\}$ とおいた。

こうすることで③は,

$G^m_{n+1} = 2G^m_n - G^{m-1}_n$ …④ とすることができる。

$n=1$を代入して,

$G^m_2 = 2G^m_1 - G^{m-1}_1$.

これを$n=2$の式に代入して,

$G^m_3 = 2G^m_2 - G^{m-1}_2 = 2(2G^m_1 - G^{m-1}_1) - G^{m-1}_2 = 4G^m_1 - 2G^{m-1}_1 - G^{m-1}_2$

これを$n=3$の式に代入して,

$G^m_4 = 2(4G^m_1 - 2G^{m-1}_1 - G^{m-1}_2) - G^{m-1}_3 = 8G^m_1 - 4G^{m-1}_1 - G^{m-1}_2 - G^{m-1}_3$

この操作を繰り返すことで,

$G^m_n = 2^{n-1}G^m_1 - \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i-1} G^m_i$

がわかる。また,

$G^m_1 = G^{m-1}_1 + G^{m-1}_2 + \cdots + G^{m-1}_k = \sum_{i=1}^{k} G^{m-1}_i$

であるから,

$G^m_n = 2^{n-1}\sum_{i=1}^{k} G^{m-1}_i - \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i-1} G^{m-1}_i$ …⑤

という風にできる。また,初項(のようなもの)を考えると,定義から,

$G^0_n = \begin{cases} 0 & (1 \leq n \leq k-1) \\ 1 & (n = k) \end{cases}$ …⑥

G^1_nを考えると,⑤の式に⑥を代入して,

$G^1_n = 2^{n-1}\cdot(0+0+\cdots+1) - (0+0+\cdots+0) = 2^{n-1}$.

であることがわかる。これらのことより,次の事実がわかる。

事実

$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = m$ (nがkで割り切れる場合は,$m+1$)とおくと,mの漸化式

$G^m_n = 2^{n-1}\sum_{i=1}^{k} G^{m-1}_i - \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i-1} G^{m-1}_i$ $\left(G^0_n = \begin{cases} 0 & (1 \leq n \leq k-1) \\ 1 & (n = k) \end{cases}, \ G^1_n = 2^{n-1}\right)$

で与えられるnの数列$\{G^m_n\}$は,

$\{F^{(k)}_n\} = \{G^0_n \mid G^1_{n-k} \mid G^2_{n-2k} \mid \cdots \mid G^m_{n-mk}\}$

という,k-ナッチ数列を群数列で捉えたときの要素である。ただし,それぞれの$\{G^m_n\}$の要素はkコずつある。

この事実は,一見計算が煩雑になっただけに見えるが,実は,kが十分大きい場合,有効であることがわかる。それを今から具体的な例や数字を用いて説明する。

具体的に G^2_n, G^3_n を求めてみよう。$G^1_n=2^{n-1}$ であるから,⑤に代入して,

$$G^2_n=2^{n-1}\sum_{i=1}^{k}2^{i-1}-\sum_{i=1}^{n-1}2^{n-i-1}\cdot 2^{i-1}=2^{n-1}(2^k-1)-2^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}=2^{n-1}(2^k-1)-2^{n-2}(n-1)$$

$$=2^{n-2}(2^{k+1}-n-1)\quad\cdots⑦$$

$k=2$の場合(フィボナッチ数列)と,$k=3$の場合(トリボナッチ数列)で正しさを確認してみると,

フィボナッチ数列 $\cdots$ $0,1,1,2,\boxed{3,5},8,13,21\cdots$

トリボナッチ数列 $\cdots$ $0,0,1,1,2,4\ \boxed{7,13,24},44\cdots$

$k=2$を代入した⑦ $\cdots$ $2^{n-2}(7-n)$

$\therefore\ n=1\Rightarrow\boxed{3},\quad n=2\Rightarrow\boxed{5}$ であり,正しい。

$k=3$を代入した⑦ $\cdots$ $2^{n-2}(15-n)$

$\therefore\ n=1\Rightarrow\boxed{7}\quad n=2\Rightarrow\boxed{13},\quad n=3\Rightarrow\boxed{24}$ であり,正しい。

次に G^3_n を求める。計算を簡略化するために,定数である $2^{k+1}-1$ を p とおいて計算すると,

$$G^3_n=2^{n-1}\sum_{i=1}^{k}2^{i-2}(p-i)-\sum_{i=1}^{n-1}2^{n-i-1}\cdot 2^{i-2}(p-i)$$

$$=2^{n-1}p\sum_{i=1}^{k}2^{i-2}-2^{n-1}\sum_{i=1}^{k}i2^{i-2}-2^{n-3}p\sum_{i=1}^{n-1}+2^{n-3}\sum_{i=1}^{n-1}i$$

$$=2^{n-1}p\left(2^{k-1}-\tfrac{1}{2}\right)-2^{n-1}\cdot\tfrac{1}{2}(2^kk-2^k+1)-2^{n-3}p(n-1)+2^{n-3}\cdot\tfrac{1}{2}n(n-1)$$

シグマの計算

$$=2^{n-2}p(2^k-1)-2^{n-2}(2^kk-2^k+1)-2^{n-3}np+2^{n-3}p+2^{n-4}n(n-1)$$

$$=2^{n-4}\{4p(2^k-1)-4(2^kk-2^k+1)-2np+2p+n(n-1)\}$$

$$=2^{n-4}(p2^{k+2}-4p-2^{k+2}k+2^{k+2}-4-2np+2p+n^2-n)$$

$$=2^{n-4}\{(2^{k+2}-2n-2)p-(k-1)2^{k+2}+n^2-n-4\}$$

$$=2^{n-4}\{2p(2^{k+1}-n-1)-2^{k+2}(k-1)+n^2-n-4\}$$

$$=2^{n-4}\{2(2^{k+1}-1)(2^{k+1}-1-n)-2^{k+2}(k-1)+n^2-n-4\}$$

$$=2^{n-4}\{2(2^{k+1}-1)^2-2(2^{k+1}-1)n-2^{k+2}(k-1)+n^2-n-4\}$$

$$=2^{n-4}\{2(2^{2k+2}-2^{k+2}+1)-2^{k+2}n+2n-2^{k+2}k+2^{k+2}+n^2-n-4\}$$

$$=2^{n-4}\{2^{2k+3}-2^{k+3}+2-2^{k+2}n+2n-2^{k+2}k+2^{k+2}+n^2-n-4)$$

整理

$= 2^{n-4}\{2^{2k+3} - 2^{k+2}(k+n+1) + n^2 + n - 2\}$ ・・・⑧

$k=2$の場合(フィボナッチ数列)と、$k=3$の場合(トリボナッチ数列)で正しさを確認してみると、

フィボナッチ数列・・・$0, 1, 1, 2, 3, 5, \boxed{8, 13}, 21, 34, 55, 89$・・・

トリボナッチ数列・・・$0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, \boxed{44, 81, 149}$・・・

$k=2$を代入した⑧・・・$2^{n-4}\{128 - 16(3+n) + n^2 + n - 2\} = 2^{n-4}(n^2 - 15n + 78)$

$\therefore\ n=1 \Rightarrow \frac{1}{8}\times 64 = \boxed{8}$　　$n=2 \Rightarrow \frac{1}{4}\times 52 = \boxed{13}$　であり、正しい。

$k=3$を代入した⑧・・・$2^{n-4}\{512 - 32(n+4) + n^2 + n - 2\} = 2^{n-4}(n^2 - 31n + 382)$

$\therefore\ n=1 \Rightarrow \frac{1}{8}\times 352 = \boxed{44}$, $n=2 \Rightarrow \frac{1}{4}\times 324 = \boxed{81}$

$n=3 \Rightarrow \frac{1}{2}\times 298 = \boxed{149}$　であり、正しい。

これ以上のG^m_nを求めるのは手計算では難しい。しかし、ここまでの結果でkが大きい場合のk-ナッチ数列のほとんどの数を扱いやすい形で求めることができる。

例えば、$k=1000$ の1000ナッチ数列の2024項を求めようとすると、

$k=1000,\ n=2024$ であるから $m=\left\lfloor \frac{2024}{1000} \right\rfloor = 2$.　すなわち

G^2_nの式に、$n-mk = 2024-2000 = 24$ を代入して求められる数が、$F^{(1000)}_{2024}$である。

G^2_nは⑦から、$G^2_n = 2^{n-2}(2^{k+1}-n-1)$ であるから、$k=1000,\ n=24$ を代入して、

$F^{(1000)}_{2024} = G^2_{24} = 2^{22}(2^{1001}-24-1) = 2^{22}(2^{1001}-25) = 2^{1023} - 5^2\cdot 2^{22}$

これは、およそ $8.98846567\times 10^{307}$ という数だそう。

普通の漸化式で解くと、1000コの足し算を2024回繰り返さなければならず、大体2024000回の足し算をするはめになるが、今回作った式を使うと、数回の計算で(扱いやすい形で)数を求めることができる。

さらに、kが大きくなれば大きくなるほど、G^m_nの項数が多くなり、それにともなって指定するnがkを大幅に越えるほど大きな数でなければ、$m=0,1,2,3(,4,5)$くらいまででほとんどカバーできることがわかる。

よって、kが大きくなれば大きくなるほど、今回求めたG^0_n~G^3_nで$F^{(k)}_n$が求まることがわかる。

4, 考察

今あるkボッチ数列の一般項を参考に書いておく。

kナッチ数列の一般項$F^{(k)}_n$は、

$$F^{(k)}_n=\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i^n}{\prod_{j=1, i\neq j}^{k}(\alpha_i-\alpha_j)}$$

ただし、$\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_k$は、

$x^k=x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1$ の解

もしくは、

kナッチ数列の一般項$F^{(k)}_n$は、

$$F^{(k)}_n=\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta_i^n}{f'(\beta_i)}$$

ただし、$f(x)=x^k-x^{k-1}-\cdots-x-1$ として、$f(x)=0$の解を$\beta_1, \beta_2 \cdots, \beta_k$とし、$f'(x)$は$f(x)$の導関数である。

である。どちらも、kが大きくなればなるほど$x^k-x^{k-1}-\cdots-x-1=0$の解を求めるのが難しくなるため今回求めた式はkが大きい場合においては今ある公式よりもnがある程度($n\leqq 3k$ ぐらい)までならば有効であることがわかる。

5. 結果(再掲)

k-ナッチ数列$\{F^{(k)}_n\}$をkコずつ区切り群数列にし、それぞれの要素を$\lfloor \frac{n}{k} \rfloor=m$ (kがnを割り切る場合は$m+1$) とおき$\{G^m_n\}$とすると、

$$F^{(k)}_n=\{G^0_n \mid G^1_{n-k} \mid G^2_{n-2k} \mid \cdots \mid G^m_{n-mk}\}$$

となり$\{G^m_n\}$は、mの漸化式

$$G^m_n=2^{n-1}\sum_{i=1}^{k}G^{m-1}_i-\sum_{i=1}^{n-1}2^{n-i-1}G^{m-1}_i \quad \left(G^0_n=\begin{cases}0 & (1\leqq n\leqq k-1)\\ 1 & (n=k)\end{cases}, \ G^1_n=2^{n-1}\right)$$

でできるnの式である。具体的には

$$G^2_n=2^{n-2}(2^{k+1}-n-1),\ G^3_n=2^{n-4}\{2^{2k+3}-2^{k+2}(k+n+1)+n^2+n-2\}\cdots$$

で表される。

6. 感想と今後の課題

塾で理科のテストをし余った時間で何気なく見つけた当たり前のような発見が，k-ナッチ数列という大きなくくりにおいて非常に重要な役割を果たしていることがわかった。今後も少しの発見から，もっと広い分野で活かせないかという視点を持って数学に取り組みたい。

今後の課題としては，

- G_n^m の一般項（mを入れたらすぐにnの式が出てくる）を見つける。
- kが小さい場合には逆に何か法則はあるのか。

の2点を調べたい。

7. 参考文献

1. Mathlog「フィボナッチ数列を一般化したkナッチ数の一般項」
mathlog.info/articles/658
2. Mathlog「フィボナッチ数列を拡張したk-ナッチ数列の一般項についての予想」
mathlog.info/articles/431
3. 高校数学の美しい物語「トリボナッチ数列，テトラナッチ数列とその一般項」
manabitimes.jp/math/2833
4. WolframAlpha　ja.wolframalpha.com
5. Desmos　desmos.com/scientific?lang=ja