正ｎ角形ねじり折り

―　折り方の総数の一般化と「とやまブランド」の魅力発信　―

富山県立富山中部高等学校　３年　舘盛 陽香　藤山 瞳　山口 天音

１．はじめに

現在、折り紙の原理を用いた人工衛星のパネルや医療用ステントなどの開発が進んでいる。このような「小さくたたんだものを大きく広げる」機構をもつ「ねじり折り」はメカニカルスイッチへの応用などの研究がされており、様々な分野への実用化にはどのようなパターンがあるのかを知る必要があると考えられるが、折れる角度や折り方の総数についての研究は見られず、参考文献にも正四角形の場合に何通りあるかしか載っていなかった。そこで、ねじり折り可能な最大角度の導出と、折り方の総数の一般化を目的とした。

また、ねじり折りを応用した「ますのすし折り紙」を開発し、地元のますのすし企業（株式会社 源）と連携することで富山ブランドの発信を目指した。

２．研究の対象とした折り方

ねじり折りとは、紙をひねって折り畳む構造をしていて、完全に折りたたむと平坦になる折り方である。この研究では、内側と外側の図形が相似な正ｎ角形である折り紙について考えた。正三角形、正四角形、正五角形の例を図２－１，２，３に示す。

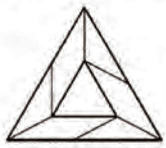


図２－１

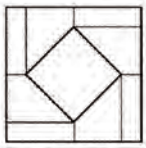


図２－２

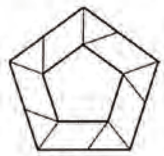


図２－３

３．用いた定理

（ｉ）前川定理

平坦折り可能な展開図の一つの頂点に集まる山折りと谷折りの差は２である。

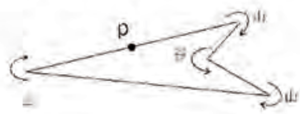


図３－１

（ⅱ）大小大の補題

一頂点平坦折りの隣り合う三つの角θ_{i-1}, θ_i, θ_{i+1}の関係が$\theta_{i-1} > \theta_i < \theta_{i+1}$であるならば、角の間の２本の折り線の山谷は異なる。

図３－２

（iii）バーンサイドの補題（コーシー・フロベニウスの定理）

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |M_g|$$

$|G|$：操作の集合の個数

$|M_g|$：操作gを行っても不変な並べ方の個数

4．ねじり折り可能な角度

内角の半分の角度を超えると重なり合ってしまい、平坦にねじり折ることはできない。よって、正 n 角形ねじり折り可能な最大の角度は $\frac{180°(n-2)}{2n}$ である。以下、この最大角度で折ることとする。

図４－１　ねじり折りの前後

5．ねじり折りという事象の数学的化

正三角形、正四角形、正五角形と実際に山谷を変えながら、実際に折ることにより何通り存在するか調べていたが、その過程で数学的にとらえることができることに気が付いた。

正四角形を例に考える。まず、図のように内部の正四角形の４つの辺の山谷を定め、山折りを赤線、谷折りを青線とする（図５－１）。点 A について考えると、大小大の補題より内部の正四角形の線分は谷折りに決まる。(図５－２)。次に点 B について考える。点 A と同様にして、大小大の補題により山折りに決まる（図５－３）。ここで、点 B において山折り１、谷折り２であるので、前川定理より点 B とつながる残りの線分は谷折りと決まる（図５－４）。内部の正四角形の残りの頂点についても、大小大の補題と前川定理を用いるとすべての線分の山谷が一意に決まる（図５－５）。すなわち、内部の正四角形の辺の山谷を決めれば、すべての線分の山谷が一意に決まる。

正 n 角形について考える。正四角形と同様に、内部の正 n 角形の各頂点につながる線分は常に４本であるので、内部の正 n 角形の辺の山谷を決めれば、すべての山谷が確定する。

したがって、正 n 角形ねじり折りの折り方の総数は、内部の正 n 角形の辺の山谷の決め方の総数に等しい。

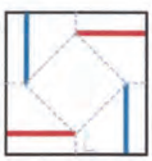


図５－１

図５－２

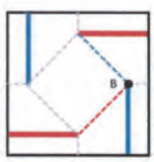


図５－３

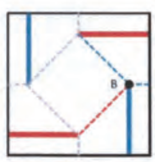


図５－４

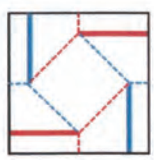


図５－５

内部の正ｎ角形の辺の山谷の決め方を考える。すべての辺について山か谷かの選択をすることと、正ｎ角形であるので、回転しても同じであることを考えると、これは２色の玉の円順列を考えることと同じである。正四角形の例を１つ示す（図５－６）。

図５－６　折り方の数学化

以上より、正ｎ角形ねじり折りの折り方の総数は、合わせてｎ個の２色の玉の円順列の総数に等しい。なお、全ての山谷が反転した折り方は、裏返して折ることと同じなので、１つの折り方として考える。すなわち、２色の玉の色が反転したものを同一視する。

６．正四角形ねじり折りの折り方の総数

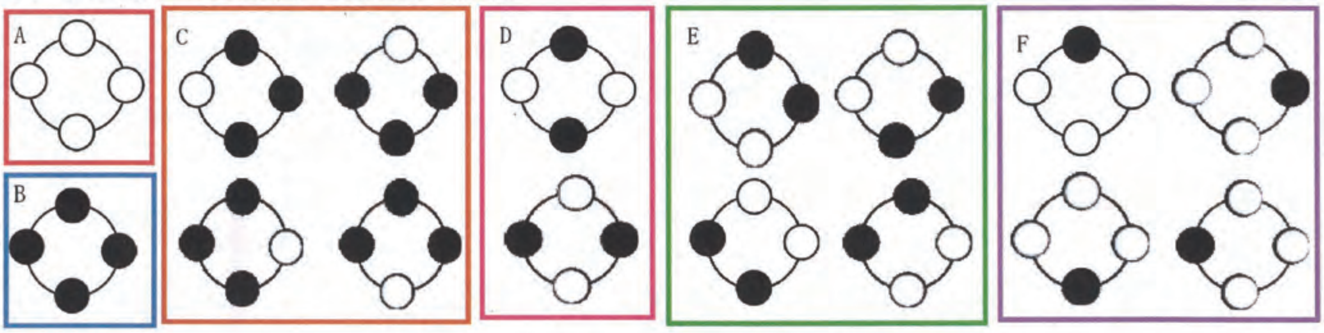


図６－１　重複を無視したすべての並べ方

今、求めたいものは、A＋C＋D＋E である。ここでバーンサイドの補題を用いてその総数を求めると、

$$\frac{1}{4}\left(2^4+2+2^2+2\right)=6$$

回転操作　　0°　90°　180°　270°

0°	回転して変わらないもの	A, B, 4C, 2D, 4E, 4F
90°	回転して変わらないもの	A, B
270°	回転して変わらないもの	A, B
180°	回転して変わらないもの	A, B, 2D

全部で　4×(A+B+C+D+E+F) ÷４となり、A+B+C+D+E＋F の６通りと求まる。
さらに、２色の玉の色が反転したものを同一視する。ここで、A と B 、C と F は、それぞれ白黒反転すると一致するが、D、E は反転しても一致するものがない（自分自身と同じになる）ので、D と E を加えて　$\frac{6+2}{2}=4$　通りと求まる。このような考え方を用いて正ｎ角形ねじり折りの折り方の総数を求める。以下、白黒の２色の玉を用いて考えることとする。

7．正奇数角形ねじり折りの折り方の総数S_n

例えば、$n = 15$ のとき、バーンサイドの補題を用いるためには、$\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{3}{15}, \dots, \frac{15}{15}$ 回転して変わらないものを考えればよい。いくつか例を挙げる。

$\frac{1}{15}$ 回転して変わらないものは、1個の玉のくくりを考えることになる。1つ目の玉を黒玉と仮定して $\frac{1}{15}$ 回転させて考えると、1周回ってすべてが黒玉になるので、くくりの中の1個の玉が白か黒かの2通りである（図7－1）。

$\frac{3}{15}$ 回転して変わらないものは、3個の玉のくくりを考えることになる。1つ目の玉を黒玉と仮定して $\frac{3}{15}$ 回転させて考えると、４，７，１０，１３個目の玉が順に黒玉になり1周回って1つ目の玉に戻る。くくりの中の3個の玉が白か黒かの2通りずつあるので2^3通りである（図7－2）。

$\frac{6}{15}$ 回転して変わらないものは、3個の玉のくくりを考えることになる。1つ目の玉を黒玉と仮定して $\frac{6}{15}$ 回転させて考えると、7、１３、4、１０個目の玉が順に黒玉になり、2周回って1つ目の玉に戻る。したがって、くくりの中は6個の玉ではなく、3個の玉が白か黒かの2通りずつあるので2^3通りである（図7－3）。これは、１５と6の最大公約数が3だからである。

1 くくり×15

=15×1 周

全て黒 or 白

図7－1

3 くくり×5=15

=15×1 周

3÷1=3

図7－2

6 くくり×5=30=15×2 周

6÷2=3

図7－3

このようにして考えると、

$$S_{15} = \frac{1}{15}\{2^1 + 2^1 + 2^3 + 2^1 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^1 + 2^3 + 2^1 + 2^1 + 2^{15}\}$$

$$= 8 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^{15} \quad = \varphi(15)2^{\frac{15}{15}} + \varphi(5)2^{\frac{15}{5}} + \varphi(3)2^{\frac{15}{3}} + \varphi(1)2^{\frac{15}{1}}$$

ただし、$\varphi(d)$はオイラーのファイ関数であり、nまでの自然数のうちdと互いに素な数の個数を表す。

一般の正n角形（nは奇数）について考えると、

くくり k のときの白黒の玉の円順列の総数は $2^{gcd(n,k)}$ である…(i)。

また、n の約数を d とし、$gcd(n,k) = \frac{n}{d}$ となるものの個数はオイラーの関数 $\varphi(d)$ で表される…(ii)。

したがって、白黒の玉の円順列の総数は、

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2^{gcd(n,k)} = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \varphi(d)2^{\frac{n}{d}}$$

全ての山谷が反転した折り方は同じとみなすと、

$$S_n = \frac{1}{2n}\sum_{d|n} \varphi(d)2^{\frac{n}{d}}$$

（ｉ）の証明

くくり k のとき、回転操作を行って元に戻る（すべての玉の白黒が確定する）までの周数を m とする。

$k=k'\,gcd(n,k), n=n'\,gcd(n,k)$　とおくと、$m=\frac{gcm(n,k)}{n}=\frac{k'n'\,gcd(n,k)}{n}=k'$

m 周後に元に戻ると、白黒はくくり $\frac{k}{m}$ で決まり、$\frac{k}{m}=gcd(n,k)$ ∎

（ⅱ）の証明

$A=\{k\in\mathbb{Z}|1\leqq k\leqq n\}$ とする。$x\in A$ と n の約数 d について、$gcd(n,k)=d\Leftrightarrow\frac{x}{d}\in\mathbb{Z}, gcd\left(\frac{x}{d},\frac{n}{d}\right)=1$

これをみたす x の個数は、$1\sim\frac{n}{d}$ までの $\frac{n}{d}$ と互いに素な数の個数に等しい。

ここで $\frac{n}{d}$ の集合は、d の集合に等しいので、$\varphi\left(\frac{n}{d}\right)=\varphi(d)$ ∎

８．正偶数角形ねじり折りの折り方の総数 S_n

S_n=（回転対称を同一視したもの＋白黒反転かつ回転対称を同一視したもの）÷２

であるので、まずは白黒反転かつ回転対称を同一視したもの（図８－１）の個数を求める。

図８－１　白黒反転+回転しても不変な図形の例

白黒反転して同一視できるものは、黒:白＝1:1 のものの一部である。よって、$\frac{n}{2}$ 個までのくくりの白黒を考えれば残りの玉の白黒は一意に定まる。

例えば、$n=16$ のとき、バーンサイドの補題を用いるためには、白黒反転かつ、$\frac{1}{16},\frac{2}{16},\frac{3}{16},\dots,\frac{16}{16}$ 回転して変わらないものを考えればよい。そこで、白黒を反転させながら回転させることにより、条件を満たすものを作ることを考える。いくつか例を挙げる。

1個の玉のくくりを考える。1つ目の玉を黒玉と仮定して$\frac{1}{16}$ 回転させて白玉にする。再び$\frac{1}{16}$ 回転させて黒玉にする。さらに$\frac{1}{16}$ 回転させて黒玉にする。これを繰り返すと白黒反転かつ回転してもかわらないものが得られる。(図８－１)。

２個の玉のくくりを考える。１つ目の玉を黒玉、２つ目の玉を白玉と仮定して$\frac{2}{15}$回転させて白黒反転させる。再び$\frac{2}{16}$ 回転させて白黒反転させる。これを繰り返すと同様に白黒反転かつ回転してもかわらないものが得られる。(図８－２)。

９個の玉のくくりを考える。１つ目から順に黒黒白黒黒黒白白黒と仮定して$\frac{9}{15}$回転させて白黒反転させる。すると、元々黒玉と仮定した玉が白玉になってしまい矛盾が生じる（図８－３)。これは１６の半分である８を超える９というくくりで考えたために生じたのである。

図８－１

図８－２

図８－３

一般の正ｎ角形（ｎは偶数）について考えると、nを$\frac{n}{2}$におきかえて、奇数角形と同様に考えればよいので、白黒反転かつ回転対称なものの総数は、$\frac{1}{n}\sum_{d|\frac{n}{2}}\varphi(2d)2^{\frac{n}{2d}}$

これに回転対称なものを合わせると、$\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)2^{\frac{n}{d}}+\frac{1}{n}\sum_{d|\frac{n}{2}}\varphi(2d)2^{\frac{n}{2d}}$

全ての山谷が反転した折り方は同じとみなすので、$S_n=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)2^{\frac{n}{d}}+\frac{1}{n}\sum_{d|\frac{n}{2}}\varphi(2d)2^{\frac{n}{2d}}\right\}$

９．結論

正奇数角形のときは白黒反転かつ回転対称なものが存在しないので、すべての自然数ｎについて成り立つように式をまとめると、正ｎ角形ねじり折りの折り方の総数は、

$$S_n=\frac{1}{2n}\left\{\sum_{d|n}\varphi(d)2^{\frac{n}{d}}+\left[\frac{gcd(n,2)}{2}\right]\sum_{d|\frac{n}{2}}\varphi(2d)2^{\frac{n}{2d}}\right\}$$

１０．富山ブランドの発信

正八角形のねじり折りが地元富山の「ますのすし」に似ていたことから、この折り紙を用いて富山ブランドの発信を目指して折り紙の開発と地元企業と連携した活動を行った。

富山県では、秀でた魅力を持つ富山県産品の中でも、とくに優れた品を選りすぐり、「富山県推奨とやまブランド」として認定しており、その中に「ますのすし」がある。ますのすしとは、わっぱに敷き詰めた天然笹のなかに、富山の雪解け水で炊き上げた富山米を酢飯にし、敷き詰め、薄紅色のマスを並

べて押し寿司にしたものである（図１０－１）。

富山県は300年以上の歴史と伝統を誇る売薬業が盛んで、かつて、薬の売薬行商でお得意先に紙風船や売薬版画などをプレゼントすることがあった。そのような役割を担うべく「ますのすし折り紙」を開発することにした。

正八角形のねじり折りが、正方形の折り紙から可能となるように、正方形と正八角形を合わせた形とし、色合いも本物のますのすしに近くなるようデザインした（図１０－２）。また、その折り方の手順書も作成した。

図１０－１　ますのすし

図１０－２　完成したますのすし折り紙

さらに、地元ますのすし企業（株式会社 源）に「ますのすし折り紙」の付録やお土産、商品ＰＲ用としての利用を提案したところ（図１０－３）、ますのすしミュージアム イベント「山・海・里ふれあい祭」にて折り紙ワークショップを開催（図１０－４）。子供から年配の方まで３３０名ほどが体験され、子供たちからは、ねじり折りという折り方を知らなかった。こういうことを考える人たちはすごいなと思いました。今まで折ったことのない折り方で難しかったけど、そこが面白かった。などの感想が聞かれ、イベント全体のアンケートでも印象に残ったもの第２位となるなど大変好評であった。

図１０－３　提案の様子

図１０－４　ワークショップの様子

１１．今後の課題

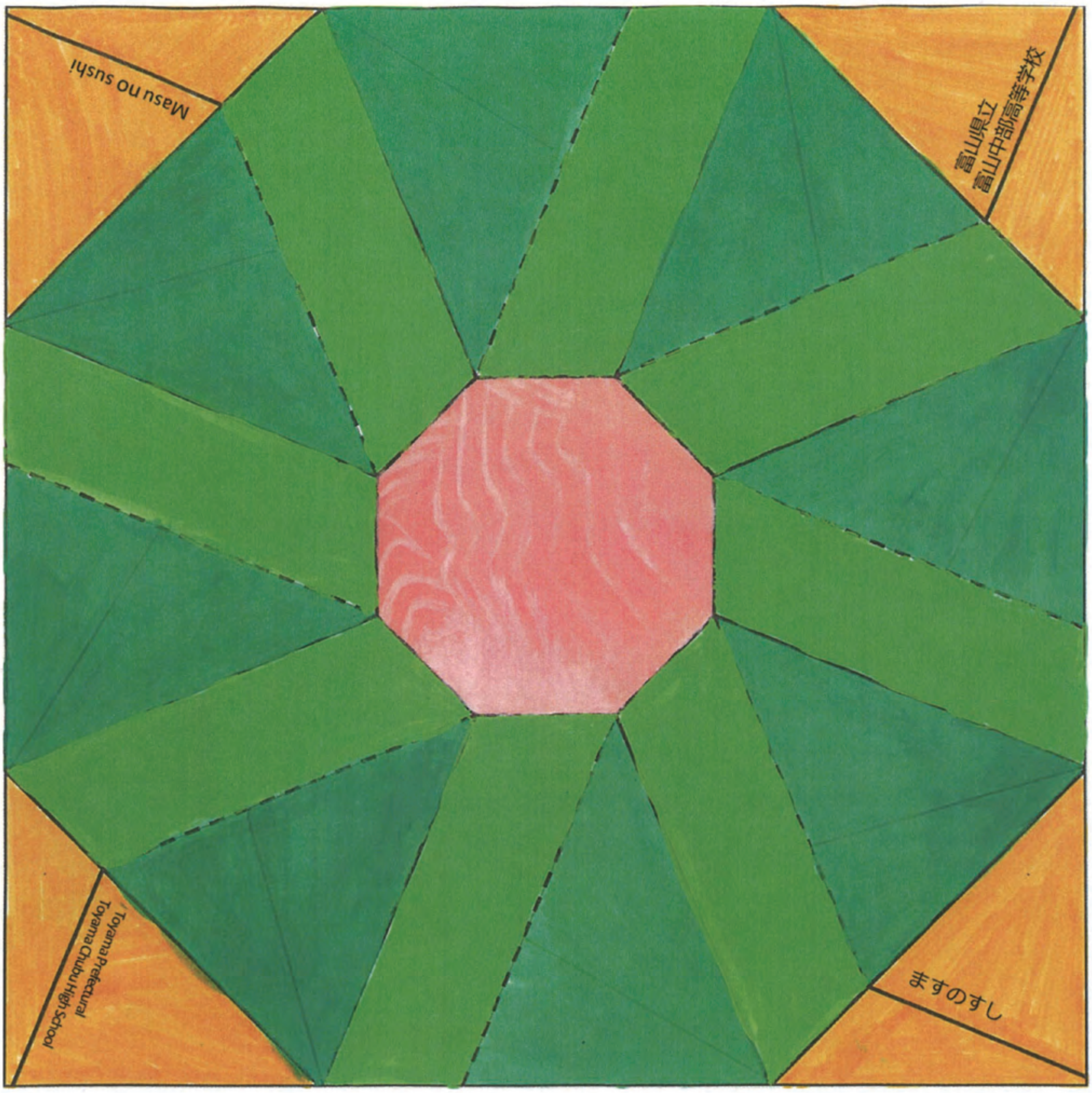
慣れ親しんできたおりがみを円順列、約数や、オイラー関数などの数学的な思考を用いて研究することができた。今後は多角形を組み合わせた場合も研究したい。また、大正時代、富山の薬売りは各家庭にお土産として紙風船を置いて行った。その紙風船の役割を果たすべく、ますのすし折り紙を「ますのすしミュージアム」の来場者に配布するなどの案について企業と検討中である。

１２．参考文献

トーマス・ハル(著) 羽鳥公士郎(訳)「ドクター・ハルの折り紙数学教室」日本評論社　2015年

三浦公亮 川崎敏和 舘知宏 博上原隆平 Robert J. Lang Patsy Wang-Iverson(編) 上原隆平ほか(共訳)『折り紙数理の広がり　抄訳 Origami』森北出版株式会社　2018年

Anne Ju 「Popular origami pattern makes the mechanical switch」Cornell University　2015年


Masu no sushi
富山県立
富山中部高等学校
Toyama Prefectural
Toyama Chubu High School
ますのすし

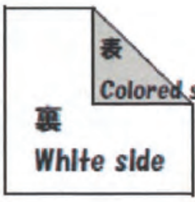
ますのすし折り紙

ますのすし

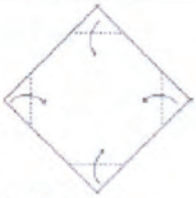
Masu no sushi

富山伝統の味。
Traditional taste of Toyama

山折り —————
Mountain fold
谷折り - - - - - - - -
Valley fold
紙の裏表



❶



山折り線で折る。
Start white side up.
Make a mountain.

❷

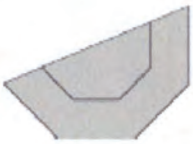
❸

山折り線で折り目をつける。

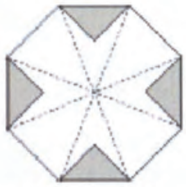
❹

山折り線で折り目をつける。
Make a mountain fold.

❺



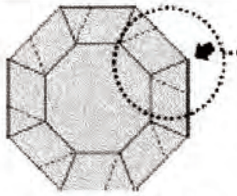
❻



同様に折り目をつける。
Repeat steps ❹~❻
on the other side.

ますのすし折り紙の折り方手順書①

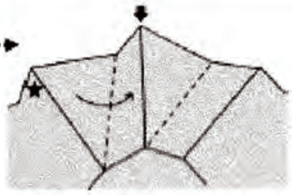
❼



谷折り線で谷折りする。

Make a valley fold.

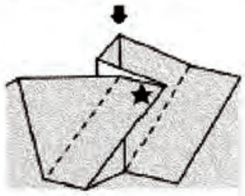
❽



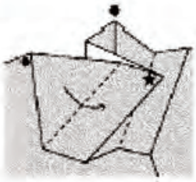
谷折り線で折る。

Make a valley fold.

❾



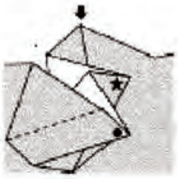
❿



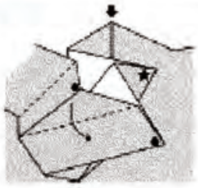
谷折り線で折る。

Make a valley fold.

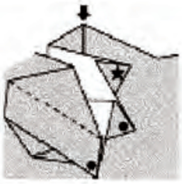
⓫



⓬



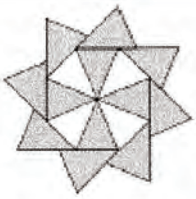
⓭



ねじるように平坦に折る。

Fold as if to twist flatly.

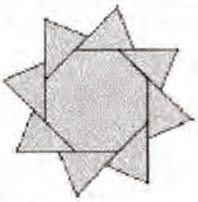
⓮



図のようになったら裏返す。

Turn over.

⓯



ますのすしの完成。

Finish !

ますのすし折り紙の折り方手順書②