ミャンガット(注1)からの贈り物

―二項係数、バーゼル問題、ネイピア数をつなぐ等式の発見―

海城高校2年　島倫太郎

0章　得られた主結果及び研究動機

本研究で得られた主な結果を以下に記す。なお、一番最後の式は本研究で最も注目すべき結果であり、その重要性から"定理"として扱う。

1. 二項係数とカタラン数(以下 C_n とする)の n 乗根

命題1.1　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{{}_{2n}C_n}=4$

命題1.2　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_n}=4$

2. 一般項に二項係数を含む数列の「部分和」の n 乗根

命題2.1　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n}C_k}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}C_k}=4$

命題2.2　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{{}_nC_k}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{{}_nC_k}}=1$

3. 一般項に二項係数を含む数列の「積」の n 乗根

命題3.1　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}{}_nC_k}=\infty$

命題3.2　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\sqrt[k]{C_k}}=4$

$$\boxed{\text{定理3.1}\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\sqrt[k]{{}_nC_k}}=e^{\frac{\pi^2}{6}}}$$

研究動機

私は我が校の数学部に部長として在籍しており、その活動の一環として提携校である新モンゴル高校と数学を通じた交流を数年間続けてきた。最近はその新モンゴル高校と「カタラン数」(注2)に関する研究をさせていただいている。

他方、私は先日学校の授業で以下の事実を習った。

事実 0.1 $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

無限大に発散する数列もn乗根をとった数列を考えれば収束する可能性がある、そのことをこの式は私に教えてくれた。

この2つのことがきっかけとなり、私はカタラン数のn乗根の極限について調べてみようという気になった。その結果として先の命題1.2のような興味深い式を得られたことから、本論文ではさらにそれを追究・拡大し、二項係数が絡む他の数列の極限についても考察していきたいと思う。

※注意

本論に入る前に本論文中でのn乗根の定義とカタラン数について知られている事実を断っておく。

定義 0.1 非負実数xと正数nに対し、xのn乗根$\sqrt[n]{x}$を以下を満たす非負実数と定める。なおこのとき、ある(x, n)の組に対し$\sqrt[n]{x}$の値はただ一つに定まる。

$$\sqrt[n]{x} = x$$

事実 0.2 カタラン数：C_nの一般項は以下のようになる。

$$C_n = \frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$$

以下では上記のことを当然のこととして議論する。

1章　二項係数とカタラン数のn乗根

1.1　命題1.1について

動機でも述べたように、当面の目標は命題1.2を示すことであり、命題1.1はその補題的な立ち位置にある。対数をとった上で、その真数条件に配慮して区分求積法を用いれば以下のような証明が与えられる。

<u>証明</u>　$a_n = \sqrt[n]{{}_{2n}C_n}$ とおく。

$$\log a_n = \frac{1}{n}\log {}_{2n}C_n$$

$$= \frac{1}{n}\log\frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{n\ (n-1)\cdots\ 1}$$

$$= \frac{1}{n}\log\frac{2\ (2-\frac{1}{n})\cdots(2-\frac{n-1}{n})}{1\ (1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(2-\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1-\frac{k}{n}\right)\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\log a_n = \int_0^1 \log(2-x)\,dx - \lim_{t\to 1-0}\int_0^t \log(1-x)\,dx$$

$$= -\left\{\Big[(2-x)\log(2-x)\Big]_0^1 - \int_0^1(-1)\,dx\right\}$$

$$+ \lim_{t\to 1-0}\left\{\Big[(1-x)\log(1-x)\Big]_0^t - \int_0^t(-1)\,dx\right\}$$

$$= -1 + 2\log 2 + \lim_{t\to 1-0}\left\{(1-t)\log(1-t) + t\right\} \quad \cdots ①$$

ここで $I = \lim_{t\to 1-0}(1-t)\log(1-t)$ とおくと、$s = \frac{1}{1-t}$ で置換すれば

$$I = \lim_{s\to\infty} -\frac{\log s}{s} = 0$$

となるから、これを①に代入し、

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n = -1 + 2\log 2 + (0+1) = \log 4 \quad \therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 4$$

■

1.2　命題1.2について

<u>証明</u>　$\log\sqrt[n]{n+1} = \frac{\log(n+1)}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} \longrightarrow 0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1} = 1$

これと事実0.1，命題1.1の議論から直ちに得られる。

■

※参考1

命題1.2を見たとき、おそらく多くの人はその式の持つ意味合いについて考えるだろう。だが、実際にはなかなかその意味合いを見つけるのは難しい。例えば、グラフを書いてみればわかることであるが、この式は十分大きいnで C_n が 4^n などにより近似できるということを表しているわけではない。また、C_n のn乗根をとってしまうと整数の領域から外れてしまうため、C_n についてよく知られた性質と関連づけるのは難しい。

※参考2

研究を進める中 $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ の極限も4となることがわかりその関連を調べてみたが、調べてみるとすでに以下のことが知られていた。

<u>事実1.1</u>　正数列 a_n に対し $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$ （lは有限値）が成り立つ。

事実1.1を用いれば、$\frac{C_{n+1}}{C_n}$ の極限を調べることにより命題1.2を得るアプローチも可能である。なお、この手法は3章で大活躍することとなる。

2章　一般項に二項係数を含む数列の「部分和」のn乗根

1章の結果を利用しつつ、二項係数絡みの数列の「和」のn乗根について考察したい。二項係数の評価はパスカルの三角形を想像すると理解しやすい。

2.1　命題2.1について

命題1.2を利用するとはさみうちの原理で簡潔な証明が与えられる。

証明　Σ の範囲が $1\leq k\leq n$ の場合から証明する。

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}C_k}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_1+C_2+\cdots+C_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_n}\sqrt[n]{1+\frac{C_{n-1}}{C_n}+\frac{C_{n-2}}{C_n}+\cdots+\frac{C_1}{C_n}} \quad \cdots ①$$

$$\lim_{n\to\infty}\log\sqrt[n]{1+\frac{C_{n-1}}{C_n}+\frac{C_{n-2}}{C_n}+\cdots+\frac{C_1}{C_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{C_{n-1}}{C_n}+\frac{C_{n-2}}{C_n}+\cdots+\frac{C_1}{C_n}\right)$$

であり、

$$1<1+\frac{C_{n-1}}{C_n}+\frac{C_{n-2}}{C_n}+\cdots+\frac{C_1}{C_n}$$

$$<1+\underbrace{\frac{C_n}{C_n}+\frac{C_n}{C_n}+\cdots+\frac{C_n}{C_n}}_{(n-1)\text{個}}=n$$

$$\therefore\ 0<\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{C_{n-1}}{C_n}+\frac{C_{n-2}}{C_n}+\cdots+\frac{C_1}{C_n}\right)<\frac{1}{n}\log n$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log n=0$ より $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{C_{n-1}}{C_n}+\frac{C_{n-2}}{C_n}+\cdots+\frac{C_1}{C_n}\right)=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{C_{n-1}}{C_n}+\frac{C_{n-2}}{C_n}+\cdots+\frac{C_1}{C_n}}=1$$

これと命題1.2を①に代入し、示すべき式が得られる。また、Σの範囲が$0\leq k\leq n$の場合も同様の手法で求められる。■

2.2 命題2.2について

<u>証明</u> $${}_nC_k=\frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+1}{1}>\left(\frac{n}{k}\right)^k>\left(\frac{n-k}{k+1}\right)^k \quad (\because n\geq k)$$

$$\therefore ({}_nC_k)^{k+1}>\left({}_nC_k\cdot\frac{n-k}{k+1}\right)^k=({}_nC_{k+1})^k \quad \therefore \sqrt[k]{{}_nC_k}>\sqrt[k+1]{{}_nC_{k+1}}$$

これをふまえると $$1<\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{{}_nC_k}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{{}_nC_k}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt[1]{{}_nC_1}=n^2$$

$$\therefore 1<\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{{}_nC_k}}<\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{{}_nC_k}}<\sqrt[n]{n^2}$$ であり、

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}=1$ ($\because$ 事実0.1) より示された。■

個人的には証明中、$\sqrt[k]{{}_nC_k}$の最大値が$\sqrt[1]{{}_nC_1}$になることに注目した点を気に入っている。

3章 一般項に二項係数を含む数列の「積」のn乗根

3.1 命題3.1について

<u>証明</u>

$$\log\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}{}_nC_k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log{}_nC_k$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log{}_nC_k \quad (\because n\geq 2,\ \log{}_nC_n=0)$$

$$\geq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log{}_nC_1=\frac{n-1}{n}\log n\longrightarrow\infty \quad (n\to\infty)$$

$$\therefore \log\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}{}_nC_k}=\infty \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}{}_nC_k}=\infty$$

■

3.2 命題3.2について

証明 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n+1}\sqrt[k]{C_k}}{\prod_{k=1}^{n}\sqrt[k]{C_k}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{C_{n+1}}=4\quad(\because 命題1.2)$$

これと事実1.1から示すべき式が得られる。 ■

3.3 定理3.1について

この定理の式こそ本論文のタイトルにある「二項係数とバーゼル問題、ネイピア数をつなぐ等式」である。この証明にも事実1.1が有効である。

証明
$$\frac{\prod_{k=1}^{n+1}\sqrt[k]{{}_{n+1}C_k}}{\prod_{k=1}^{n}\sqrt[k]{{}_nC_k}}=\frac{\sqrt[1]{\frac{(n+1)!}{1!\,n!}}\cdot\sqrt[2]{\frac{(n+1)!}{2!\,(n-1)!}}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n!\,1!}}\cdot\sqrt[n+1]{{}_{n+1}C_{n+1}}}{\sqrt[1]{\frac{n!}{1!(n-1)!}}\cdot\sqrt[2]{\frac{n!}{2!\,(n-2)!}}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n]{\frac{n!}{n!\,0!}}}$$
$$=\sqrt[1]{\frac{n+1}{n}}\cdot\sqrt[2]{\frac{n+1}{n-1}}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n]{\frac{n+1}{1}}$$
$$=\prod_{k=1}^{n}\sqrt[k]{\frac{n+1}{n+1-k}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\log\prod_{k=1}^{n}\sqrt[k]{\frac{n+1}{n+1-k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\log\frac{n+1}{n+1-k}$$
$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\frac{k}{N}}\cdot\frac{1}{N}\log\frac{N}{N-k}\quad\left(\begin{array}{l}N=n+1\text{ とおくと}\\ n\to\infty\text{ ならば }N\to\infty\end{array}\right)$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\frac{k}{N}}\log\frac{1}{1-\frac{k}{N}}$$
$$=\int_0^1\frac{\log\frac{1}{1-x}}{x}\,dx=-\int_0^1\frac{\log(1-x)}{x}\,dx.$$

一般に、$\int_0^1\frac{\log(1-x)}{x}dx=-\frac{\pi^2}{6}$ となることが知られている。よって、

$$\log\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\sqrt[k]{\frac{n+1}{n+1-k}}=\frac{\pi^2}{6}\qquad\therefore\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\sqrt[k]{\frac{n+1}{n+1-k}}=e^{\left(\frac{\pi^2}{6}\right)}$$

となり、事実1.1から示すべき式が得られた。 ■

4章 考察・感想

本論文で紹介した式は、左辺の形からだけでは収束するのかどうかさえも想像がつかないようなものばかりであったため、予想しては外れの繰り返しで、中には求めるのに半月以上かかった式もあった。特に、命題3.2や定理3.1ははじめ事実1.1を用いずダイレクトに区分求積法で解決する流れを思い描いていたため、その思考からの脱却にかなりの時間を要したことは印象深い。また、極限という問題の性質上議論の厳密性には非常に苦労した。

だが最終的に証明の過程がどれも比較的簡潔に記述できたこと、また、各々の式同士にしばしば関連が見出せたことなどは、美しく感動を伴うものであった。

今後は、本論文で紹介した式の持つ意味や直感的にそれらの式を理解する方法を模索してみたい。

最終的には二項係数の話が中心となった本研究であるが元は新モンゴル高校との数学交流、そしてそこでの"ミャンガット"数に関する研究に端を発している。その意味で、本研究で得られた美しい諸結果、中でも二項係数、バーゼル問題、ネイピア数をつなぐ定理3.1の式は、時を超えてミャンガットが私たちに授けてくれた「贈り物」のように思えてならないのである。

5章 注釈

(注1) ミャンガット(1692-1763)は南モンゴル出身の数学者で、その数々の功績からモンゴル数学の父と呼ばれる人物である。πや三角関数などに関する複数の重要な無限級数を発見したことや、ルネサンス時代の西洋書籍を東洋に導入することへの貢献などで知られる。

(注2) $n=0,1,2,3,4,\cdots$ に対し $1,1,2,5,14,\cdots$ となる数列はカタラン数という名で一般的に知られているが、カタラン(1814~1894)よりも前にミャンガットがこの数列について言及していたことから、これを「ミャンガット数」と呼ぶべきだとの説もある。そうした背景から私たちは新モンゴル高校との数学交流においてこの数列を一大テーマに据えている。本論文では一般的な呼称に則り、基本はカタラン数と表記しているが、ミャンガットの存在がなければ本研究は生まれなかったであろう。

6章 参考文献

- 『円周率が歩んだ道』上野健爾、岩波現代全書、2013
- 「$\{a_n\}$の第n項のn乗根がある値に収束するとき隣り合った項の比も同じ値に収束するか」<http://fujidig.hatenablog.com/entry/2015/08/18/224035> 最終閲覧日：2019年8月31日
- 『組合せ数学入門』海城中高数学科および新モンゴル高校N.Dashbat編、海城中高研究集録、2015