円周率の近似(新公式?)

畑　悠貴

§1. 初めに

円周率の近似は、シグマや階乗など、一見円周率とは無縁に見えるような記号を多く使っているものがあり、魅力があると思う。
しかし、さまざまな方法が存在する一方で、すでにある方法を見ても、根号が入って近似しづらかったり、収束が遅かったりして、円周率を求めている実感がなかった。
そこで、オリジナルのアプローチを考え、自力で求めてみたいと思った。

良い近似とは

良い近似には、2つの要素があると思う。
1つは、計算のしやすさ。
根号が入ると、ルートの小数値を求めてから近似をする必要があり、計算しづらい。
三角関数が入ると、ルートが増え、尚更厄介である。
2つ目は、収束の速さ。
例えば、

$$\frac{\pi^2}{6}=\zeta(2)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

という、ゼータ関数による近似というものがあるが、これは、収束がとても遅い。
すなわち、収束の誤差を求めると、

$\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\cdots$ となり、少なくとも $\frac{1}{n^2}$ より大きいわけだが、

m桁計算するためには少なくとも$n=10^{\frac{m}{2}}$まで計算する必要がある。

これは指数関数的に増えていくので、膨大な量の計算をしなくてはいけないことがわかる。
また、円周率を求めるときに根号が入るため、数式としては美しいものの、近似としては良いとは言えない。
以上の2つを近似の「精度」として、今後の議論を進めるものとする。

円周率の定義

円周率πは、円周と直径の比である。

例えば、半径1の円の円周はπである。

前提条件

円周率πは、以下のようにあらわすことができる。

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

§2. 実際に使われている方法(ライプニッツの円周率公式)

円周率の近似として、以下のようなものが知られている。

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \approx \int_0^1 \frac{1-x^{2n}}{1+x^2}dx$$

$$= \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots)dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-1}\right)$$

この近似の精度を考えてみる。

まず、根号が入らず、有理数のみで計算できるので、比較的簡単に計算できる。

次に、収束の速さだが、$\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-1}$は正なので、

この近似の誤差は、

$$\pi - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-1}\right) > \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1} = \frac{2}{(4n-3)(4n-1)} > \frac{1}{8\mathrm{n}^2}$$

となり、m桁計算するためには少なくとも$\mathrm{n} = \frac{10^{\frac{\mathrm{m}}{2}}}{8}$まで計算する必要がある。

これは§1. のゼータ関数と同様に、指数関数的に増えていくので、収束が遅い。

しかし、計算のしやすさで考えると精度の良い近似なので、

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$を利用した近似を考える。

§ 3. ラマヌジャンによる近似

ラマヌジャンによって発見された円周率の近似には、以下の 2 つがある。

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{99^2}\sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty}\frac{(4n)!\,(26390n+1103)}{(n!)^4\cdot 396^{4n}}$$

$$\frac{4}{\pi}=\sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n)!\,(21460n+1123)}{(4^n n!)^4\cdot 882^{2\mathrm{n}+1}}$$

前者は、根号が含まれている。
また、前者も後者も逆数を用いているため、近似がしづらい。
ただ、有理数で近似できているため、このようなシグマを使った級数的な、
しかも、より簡単に計算できる式を発見してみたい。

§ 4. オリジナルのアプローチ(円周率近似の新公式?)

§ 3. までで従来の求め方を紹介したが、このセクションでは、オリジナルな近似方法を紹介します

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$を用いて、

$$I_n=\int_0^1\frac{\{f(x)\}^n}{1+x^2}dx$$

という関数を考える。
ここで、

$$\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}[\log(1+x^2)]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$$

だが、式に$\log 2$が入ると近似ができないので、$\{f(x)\}^n$を$1+x^2$で割った余りを$\mathrm{a_n}x+b_n$とすると、任意のnに対して、$\mathrm{a_n}=0$となるような$f(x)$を探したい。そのためには、剰余の定理より、任意のnに対して$\{f(i)\}^n=\{f(-i)\}^n$を満たす関数を探せばよい。
ここで、$f(x)=\{g(x)\}^{\mathrm{m}}$とすると、$g(i)$は実数のm乗根なので、$\arg\{g(i)\}$を考える。
まず、根号が入るのを避けるために、$g(x)$の係数、つまり$g(i)$の実部と虚部が整数比で計算できるようにしたい。
実部と虚部が整数比となる$g(i)$には、$\arg\{g(i)\}=\pi$、$\frac{\pi}{2}$、$\frac{\pi}{4}$などがある。
普通に計算しても、$\arg\{g(i)\}=\pi$、$\frac{\pi}{2}$、$\pm\frac{\pi}{4}$とすると、$g(x)=x^2$、$g(x)=x$、$g(x)=(1\pm x)$などがあるが、これらを計算するといずれも§2. で紹介した方法が導かれる。
収束を速めるために、不等式で挟むことを考えた。そこで、以下のような工夫を施す。

$$\boldsymbol{I_{m,n}=\frac{x^{2m}(1-x)^{4n}}{1+x^2}}\text{、}\boldsymbol{L_{m,n}=\int_0^1 x^{2m}(1-x)^{4n}dx}\text{とする。}$$

$\boldsymbol{L_{m,n}}$はβ関数なので、$\boldsymbol{L_{m,n}=\frac{(2m)!\,(4n)!}{(2m+4n+1)!}}$と表される。

ここで、$I_{m,n}$の分母について考えると、$0 \le x \le 1$なので、$1 \le 1 + x^2 \le 2$となる。

等号が常には成り立たないことに注意すると、

$$\frac{(2m)!\,(4n)!}{2(2m+4n+1)!} = \frac{L_{m,n}}{2} < I_{m,n} < L_{m,n} = \frac{(2m)!\,(4n)!}{(2m+4n+1)!} \cdots (*)$$

$I_{m,n}$を多項式$f_{m,n}(x)$で表すと、

$$I_{m,n} = \int_0^1 f_{m,n}(x)dx + \frac{\pi}{4}(-4)^n$$

と書けるので、$f_{m,n}(x)$を求める。

まず、$f_{0,0}(x) = 0$なので、

$$f_{0,n+1}(x) = (1-x)^4 f_{0,n}(x) + (-4)^n f_{0,1}(x)$$

$$g_{0,n}(x) = \frac{\mathrm{f_{0,n}}(x)}{(-4)^n}、\mathrm{p}(x) = -\frac{(1-x)^4}{4}、\mathrm{q}(\mathrm{x}) = -\frac{f_4(x)}{4}$$

とすれば、

$$g_{0,n+1}(x) = \mathrm{p}(x) g_{0,n}(x) + \mathrm{q}(\mathrm{x})$$

$$g_{0,n+1}(x) - \frac{\mathrm{q}(\mathrm{x})}{1-p(x)} = \mathrm{p}(x)\left\{g_{0,n}(x) - \frac{\mathrm{q}(\mathrm{x})}{1-p(x)}\right\}$$

$$g_{0,n}(x) = \{\mathrm{p}(x)\}^n \left\{g_{0,0}(x) - \frac{q(x)}{1-p(x)}\right\} + \frac{q(x)}{1-p(x)}$$

$g_{0,0}(x) = f_{0,0}(x) = 0$なので、

$$g_n(x) = \left[\frac{1-\{p(x)\}^n}{1-p(x)}\right] q(x)$$

$$= [1 + p(x) + \cdots + \{p(x)\}^{n-1}] q(x)$$

次に、

$$f_{m+1,n}(x) = x^2 f_{m,n}(x) + (-1)^m (-4)^n f_{1,0}(x)$$

$$g_{0,n}(x) = \frac{\mathrm{f_{0,n}}(x)}{(-1)^n}、\mathrm{p}(x) = -x^2、\mathrm{q}(\mathrm{x}) = -f_{1,0}(x)$$

とすれば、

$g_{m+1,n}(x) = r(x) g_{m,n}(x) + s(x)$となり、

$$g_{m,n}(x) = [1 + r(x) + \cdots + \{r(x)\}^{n-1}] s(x) + \{r(x)\}^m g_{0,n}(x)$$

これを解くと任意のm,nについて$\frac{L_{m,n}}{2} < I_{m,n} < L_{m,n}$を用いて円周率が近似できる。

前ページの議論では、m, nと文字が 2 つ使っているため、以下のような不都合がある。

1. 漸化式の処理がしづらい。

2. シグマを用いた式で、mn通り以上の計算結果を足し合わせることになるため、計算量が増えて、収束が速いというメリットが打ち消されてしまう。

少なくとも一つは 0 と異なる互いに素なa, bに対して、以下のようにI_nを定義する。

$$I_n = \int_0^1 \frac{\{x^{2a}(1-x)^{4b}\}^n}{1+x^2} dx \ldots ①$$

$\{x^{2a}(1-x)^{4b}\}^n$を$1+x^2$で割った商を$f_n(x)$とする...②

このとき、

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx + \frac{\pi}{4}(-1)^{an}(-4)^{bn}$$

また、

$$f_{n+1}(x) = x^{2a}(1-x)^{4b} f_n(x) + (-1)^{an}(-4)^{bn} f_1(x)$$

となるため、

$$t = (-1)^a(-4)^b、g_n(x) = \frac{f_n(x)}{t^n}、\mathrm{p}(x) = \frac{-\{x(1-x)\}^4}{t}、q(x) = \frac{f_1(x)}{t}$$

とすれば、

$$g_{n+1}(x) = p(x)g_n(x) + q(x)$$

$$g_{n+1}(x) - \frac{q(x)}{1-p(x)} = p(x)\left\{g_n(x) - \frac{q(x)}{1-p(x)}\right\}$$

$$g_n(x) = \{p(x)\}^n \left\{g_0(x) - \frac{q(x)}{1-p(x)}\right\} + \frac{q(x)}{1-p(x)}$$

$g_0(x) = f_0(x) = 0$なので、

$$g_n(x) = \left[\frac{1-\{p(x)\}^n}{1-p(x)}\right] q(x)$$

$$= [1 + p(x) + \cdots + \{p(x)\}^{n-1}]\mathrm{q(x)} \ldots ③$$

②において、$n = 1$を代入した$f_1(x)$を、

$$f_1(x) = \sum_{j=0}^{2a+4b-2} a_j x^j$$ という形で表すことができる。

つまり、$f_1(x)$のj次の係数をa_jとする。

③における、$\{p(x)\}^k$と$q(x)$のj次の項の積の積分は、

$$\int_0^1 a_j x^j \{p(x)\}^k dx = \int_0^1 \frac{x^{j+2ak}(1-x)^{4bk}}{t^k} dx = \frac{(\mathrm{j}+2\mathrm{ak})!\,(4\mathrm{bk})!}{t^k\{j+(2a+4b)k+1\}!}$$

$$\pi \approx \mathrm{t}\int_0^1 g_n(x)dx = \sum_{j=0}^{2a+4b-2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 a_j x^j\{p(x)\}^k dx = \sum_{j=0}^{2a+4b-2} a_j \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\mathrm{j}+2\mathrm{ak})!\,(4\mathrm{bk})!}{t^k\{j+(2a+4b)k+1\}!} \cdots ④$$

なお、$(*)$より、この近似の誤差は$L_{m,n}-\frac{L_{m,n}}{2}=\frac{L_{m,n}}{2}$なので、計算量を少なくして誤差を減らすために、

① のI_nにおいて、$(\mathrm{a},\mathrm{b})=(2,1)$とすると、収束が速いことがわかる。

このとき、

$\{a_j\}$を、$a_0=4$、$a_1=0$、$a_2=-4$、$a_3=0$、$a_4=5$、$a_5=-4$、$a_6=1$とすれば、

$$\int_0^1 g_n(x) = -\sum_{j=0}^{6} a_j \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\mathrm{j}+4\mathrm{k})!\,(4\mathrm{k})!}{(-4)^k(j+8k+1)!}$$

$$\frac{\mathrm{I_n}}{(-4)^{n-1}} = \frac{1}{(-4)^{n-1}}\int_0^1 f_n(x) \pm \pi = \int_0^1 g_n(x) \pm \pi = \pm\pi \mp \sum_{j=0}^{6} a_j \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\mathrm{j}+4\mathrm{k})!\,(4\mathrm{k})!}{(-4)^k(j+8k+1)!}$$

また、$1<1+x^2<2$なので、

$$\frac{(4\mathrm{n})!^2}{2(8n+1)!} = \int_0^1 \frac{\{x(1-x)\}^{4n}}{2}dx < \mathrm{I_n} < \int_0^1 \frac{\{x(1-x)\}^{4n}}{1}dx = \frac{(4\mathrm{n})!^2}{(8n+1)!} \cdots ⑤$$

はさみうちの原理より、$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$なので、

$$\pi \approx \sum_{j=0}^{6} a_j \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\mathrm{j}+4\mathrm{k})!\,(4\mathrm{k})!}{(-4)^k(j+8k+1)!}$$

が成り立つ。

(i) nが奇数のとき、この近似は円周率を上回り、⑤に代入すると、

$$\left(\sum_{j=0}^{6} a_j \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\mathrm{j}+4\mathrm{k})!\,(4\mathrm{k})!}{(-4)^k(j+8k+1)!}\right) - \frac{4(4\mathrm{n})!^2}{4^n(8n+1)!} < \pi < \left(\sum_{j=0}^{6} a_j \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\mathrm{j}+4\mathrm{k})!\,(4\mathrm{k})!}{(-4)^k(j+8k+1)!}\right) - \frac{2(4\mathrm{n})!^2}{4^n(8n+1)!}$$

(ii) nが偶数のとき、この近似は円周率を下回り、⑤に代入すると、

$$\left(\sum_{j=0}^{6} a_j \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\mathrm{j}+4\mathrm{k})!\,(4\mathrm{k})!}{(-4)^k(j+8k+1)!}\right) + \frac{2(4\mathrm{n})!^2}{4^n(8n+1)!} < \pi < \left(\sum_{j=0}^{6} a_j \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\mathrm{j}+4\mathrm{k})!\,(4\mathrm{k})!}{(-4)^k(j+8k+1)!}\right) + \frac{4(4\mathrm{n})!^2}{4^n(8n+1)!}$$

nを大きくすると誤差が急激に減る。計算してみると、$\mathrm{n}=1$で 3 桁、$\mathrm{n}=2$で 6 桁…というように、nに対して、$3\mathrm{n}$桁が求まることがわかる。excel では、小数点以下 14 桁までしか計算できず、$\mathrm{n}=5$以降で誤差が 0 となっている。

	A	CD	CE	CF	CG	CH
1	a					
2	b					
3	↓k→j	近似(下)	近似(上)	誤差(下)	誤差(上)	範囲
4						
5	0	3.14127	3.142063	0.000323	0.000471	0.000794
6	1	3.141592	3.141593	3.41E-07	2.31E-07	5.71E-07
7	2	3.141593	3.141593	1.86E-10	2.76E-10	4.62E-10
8	3	3.141593	3.141593	2.35E-13	1.59E-13	3.94E-13
9	4	3.141593	3.141593	0	0	0
10	5	3.141593	3.141593	0	0	0
11	6	3.141593	3.141593	0	0	0
12	7	3.141593	3.141593	0	0	0
13	8	3.141593	3.141593	0	0	0
14	9	3.141593	3.141593	0	0	0
15	10	3.141593	3.141593	0	0	0
16	11	3.141593	3.141593	0	0	0
17	12	3.141593	3.141593	0	0	0
18	13	3.141593	3.141593	0	0	0
19	14	3.141593	3.141593	0	0	0
20	15	3.141593	3.141593	0	0	0
21	16	3.141593	3.141593	0	0	0
22	17	3.141593	3.141593	0	0	0
23	18	3.141593	3.141593	0	0	0
24	19	3.141593	3.141593	0	0	0
25	20	3.141593	3.141593	0	0	0
26						

※ k=n-1

早い近似で、かつ、有理数のみを使って近似をとれるので、これはかなり近似の性能が高いのではないだろうか。

§5. 結論

早い近似で、かつ、有理数のみを使って近似をとれる関数を見つけることができました。幾何学的な方法でも確率的な方法でもなく、解析的に求めたこの式ですが、具体的な値を計算するときに必要な演算は、実は四則演算のみなので、計算自体は誰にでもできます。この近似を円周率の近似の新公式として提唱して、本論文を終わらせていただきます。

§6. おまけ

円周率を求める際、「式に$\log 2$が入ると近似ができないので、$\{f(x)\}^n$を$1+x^2$で割った余りを$a_n x + b_n$とすると、任意のnに対して、$a_n = 0$となるような$f(x)$を探したい。」ということで、$f(x) = x^{2a}(1-x)^{4b}$としたが、$b_n = 0$となるような$f(x)$を探せば、実は$\log 2$の近似もできる。

$$I_n = \int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$$ とすることで、$\log t$ の近似が取れる。

+1

特に、tが平方数のとき、有理数で近似が取れる。