Simsonの定理の拡張

～4本のSimson線と大量の垂線が織りなす様々な性質～

私立市川中学校2年　齋藤 輝

1. はじめに

僕は中1の時、その美しさと自力で問題を解決できた時の爽快感に魅了され、数学に強く興味を持った。今では毎日初等幾何や数学オリンピック、現代数学の勉強をしている。その中でも現在最も力を入れているのが初等幾何の研究だ。GeoGebraという作図ソフトを用いて図形を観察し、拡張定理などの発見を試みている。研究というだけあってなかなか簡単に定理が見つかるわけではない。しかし、美しい性質を見つけた時の爽快感が研究のモチベーションになっている。

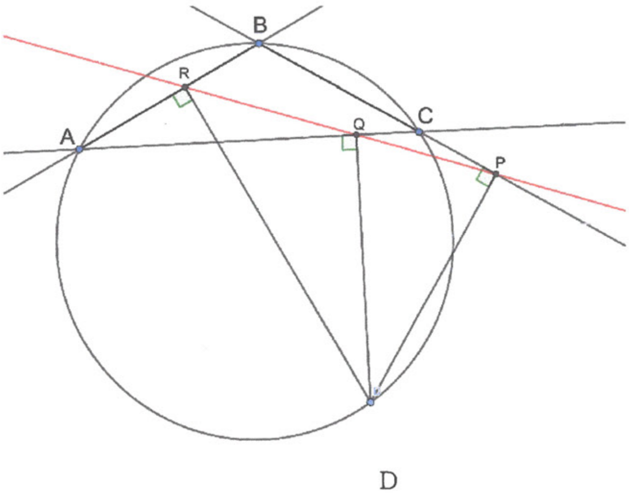
今回のテーマはシムソンの定理の拡張である。シムソンの定理の主張は非常に簡単で、初心者も容易に証明できるものとなっている。(ただ実用性はあまりない)。また、シムソンの定理は「垂線」を多く含んでおり、垂心や共円などの性質が見つけやすく、拡張も比較的容易なので、短期間での研究に適していると考えた。今回は複素平面などを使わず、初等的にGeoGebraを用いて研究を進めた。 読んだ方は少しでも初等幾何学の美しさに触れていただければ幸いである。

---

2. 前提知識(シムソン線、シュタイナー線)

> ***Theorem*** シムソン(*Simson*)の定理
> 三角形ABCと点Dがある。Dから直線BC,CA,ABに下した垂線の足をそれぞれP,Q,Rとおく。A,B,C,Dが同一円周上にあるならばP,Q,Rは同一直線上にある。P,Q,Rを通る直線をDから△ABCに引いた**シムソン線**という。

(証明)



・Dが三角形の頂点と一致するとき

自明に成り立つ。

・AD,BD,CDのいずれかが円の直径になるとき

これも自明に成り立つ

よってこれ以外の場合を考えればよい。

対称性より、DがBを通る直径に対してCと同じ側にあるとしてよい。

$\angle ARD = \angle AQD = 90^\circ$よりARQDは共円なので

$\angle RAD + \angle RQD = 180^\circ$

CQDPも共円だから、$\angle PQD = \angle PCD = 180^\circ - \angle BCD$

以上より、$\angle RAD + \angle BCD + \angle RQD + \angle PQD = 360^\circ$

ABCDは共円なので$\angle BCD + \angle BRD = 180^\circ$

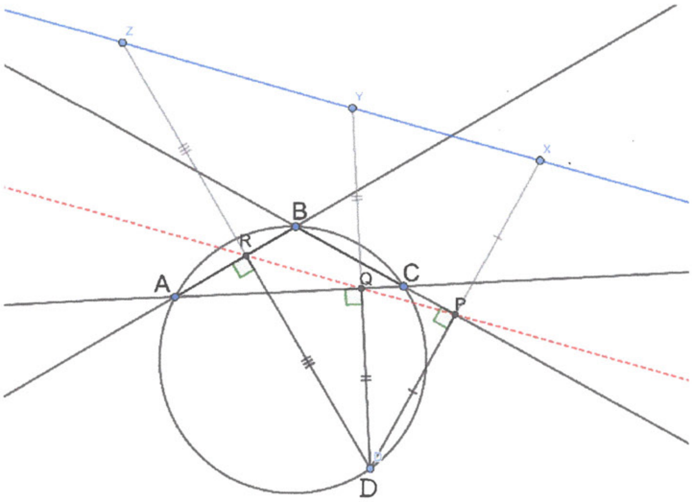
よって$\angle RQD + \angle PQD = 180^\circ$となり主張が従う。　■

(逆も成り立つ)

> ***Theorem*** シュタイナー(*Steiner*)線
> 三角形ABCと点Dがある。Dを直線BC,CA,ABについて対象移動した点をそれぞれX,Y,Zとする。ABCDが同一円周上にあるならば、X,Y,Zは同一直線上にある。この線をDから△ABCに引いた**シュタイナー線**という。

(証明)

実はこの定理の証明は既に終わっている。次のページの図を見てほしい。赤色の点線がDからABCに引いたシムソン線である。シュタイナー線(青色)はDを中心にシムソン線を2倍に相似拡大したものであるから、シムソンの定理より明らか。 ■



次にこれからの議論において重要となる補題を用意する。

Lemma 1

平面上に三角形ABCとDEFがある。

AB∥DE BC∥EF AC∥DF

が成立するならば直線AD,BE,CFは高々一点で交わる。

(証明) 直線ADとBEの交点をPとし、直線PFと直線BCの交点をQとする。CとQが一致することを示せばよい。

AB∥DEより、PE:PB=PD:PA

またBQ∥EFよりPE:PB=PF:PQ

以上より、PD:PA=PF:PQ⇒AQ∥DFを得る。

一方、DF∥ACなのでCとQは一致 ■

＊上の証明は2つの三角形の位置関係によらず成り立つのであえて図はつけない。

[この補題は直感的には明らかでも、初等幾何の諸定理に用いることができる。例えば、重心の存在を示す場合。三角形の3辺の中点を結んだ三角形は元の三角形と補題1のような状況(平行)あることは中点連結定理から確認できる。そこから補題1を用いれば、証明は完了する。このように、この補題は共点問題において威力を発揮する。このことを学校の幾何の授業で知った。]

---

3. シムソンの定理の拡張

シムソンの定理において、Dから3直線に垂線を下すところは、射影幾何学的にみると、Dを3直線に「正射影」しているととらえることができる。では射影する角度を変えてみたらどうだろうか。

Proposition No.1

シムソンの定理において、P,Q,RをDから3直線に対して等しい角度で射影したものとすると、P,Q,Rの位置関係はどうなるだろうか。ただし、射影する角度は3点P,Q,Rが定義される場合のみ考える。

(証明) P,Q,Rがシムソンの定理と同じく同一直線上に並ぶことを示す。

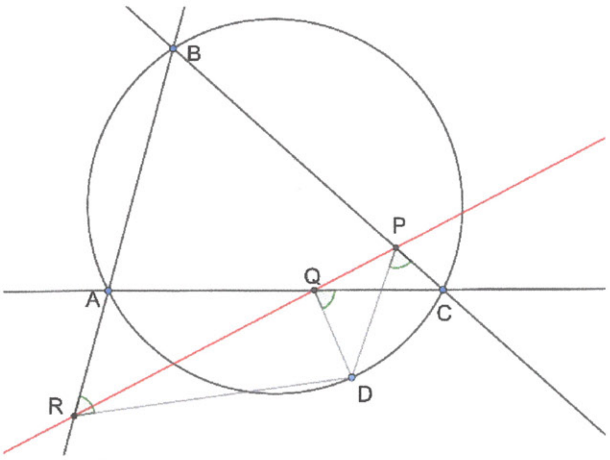
等しい角度で射影していることは、∠CPD=∠CQD=∠ARDを意味する。

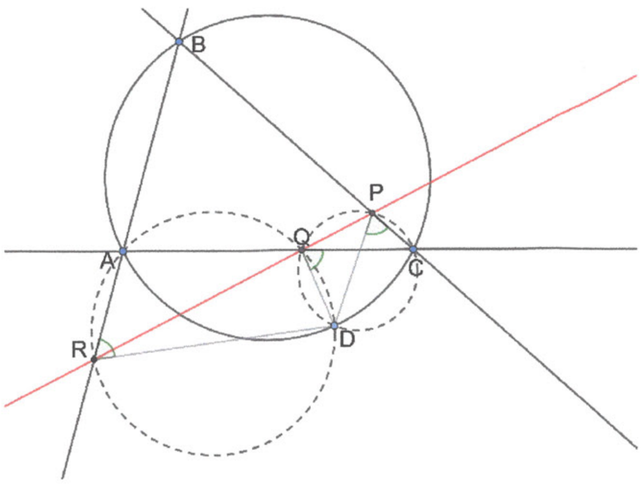
∠CPD=∠CQDと∠CQD=∠ARDより、CPQDとAQDRは共円

∠PCD+∠PQD=180° ∠RAD=∠RQD⇒∠BAD+∠RQD=180°

よって$\angle RQD+\angle PQD+\angle BAD+\angle BCD=360^\circ$なので、

ABCD の共円（$\angle BAD+\angle PCD=180^\circ$）と PQR の共線（$\angle RQD+\angle PQD=180^\circ$）が互いに必要十分条件であることが示された。





＊この証明は、正射影の場合のシムソンの定理の証明とほぼ同じ議論「D を通る 3 円を描いて共線を示す問題」であるため、こちらの方がシムソンの定理の一般形といえる。一方、射影する角度を P,Q,R で変えると、当然 P,Q,R は同一直線上ではなくなる。では、この場合は P,Q,R の位置関係をどう処理したらよいか。これはあくまで僕の仮説であるが、PQR の外接円を考えればよい。直線を半径∞の円とみれば、P,Q,R の位置関係を表すパラメータを作成できる。このように、直線→円と次元を変化させて考えることは幾何学において非常に重要である。実際、GeoGebra で PQR の外心の軌跡を観察すると、特殊な図形が現れた。これに関しては今後の僕の研究の課題にしたいと思う。

Proposition No.2

内接四角形 ABCD がある。A から△BCD に引いたシムソン線と B から△ACD に引いたシムソン線と C から△ABD に引いたシムソン線と D から ABC に引いたシムソン線は高々一点で交わる。

（証明）＊ただし AC,BD は直径ではないとする。

D から直線 AB,AC,BC に下した垂線の足を E,F,G、A から BC,BD,CD に下した垂線の足を H,I,J、C から AB,BD,AD に下した垂線の足を K,L,M とし、B から AD,AC,CD に下した垂線の足を N,O,P とする。

$\angle BOC=\angle BLC=90^\circ$より、BOLC は共円なので、$\angle BCO=\angle BLO$（円周角の定理）

ABCD の共円から、$\angle BCO=BDA$（円周角の定理）

$\therefore \angle BLO=\angle BDA \quad \Rightarrow \quad OL /\!/ AD$

$\angle CGD=\angle CFD=\angle CLD=\angle CMD=90^\circ$より、GCFLMD は共円。したがって、

$\angle FGM=\angle FDM \quad \angle EFL=\angle LMG=\angle LDG \quad \angle BCF=\angle GDF$

ABCD が共円であることを用いると、$\angle BDA=\angle BCF=\angle GDF$ もわかる。

以上の 2 式を整理すると、錯角が等しいことを得る。

$\therefore \angle EFL=\angle EGM \quad \Rightarrow FL /\!/ GM$

$\angle BGD=\angle BND=90^\circ$より、BNDG は共円。ABCD も共円なので、

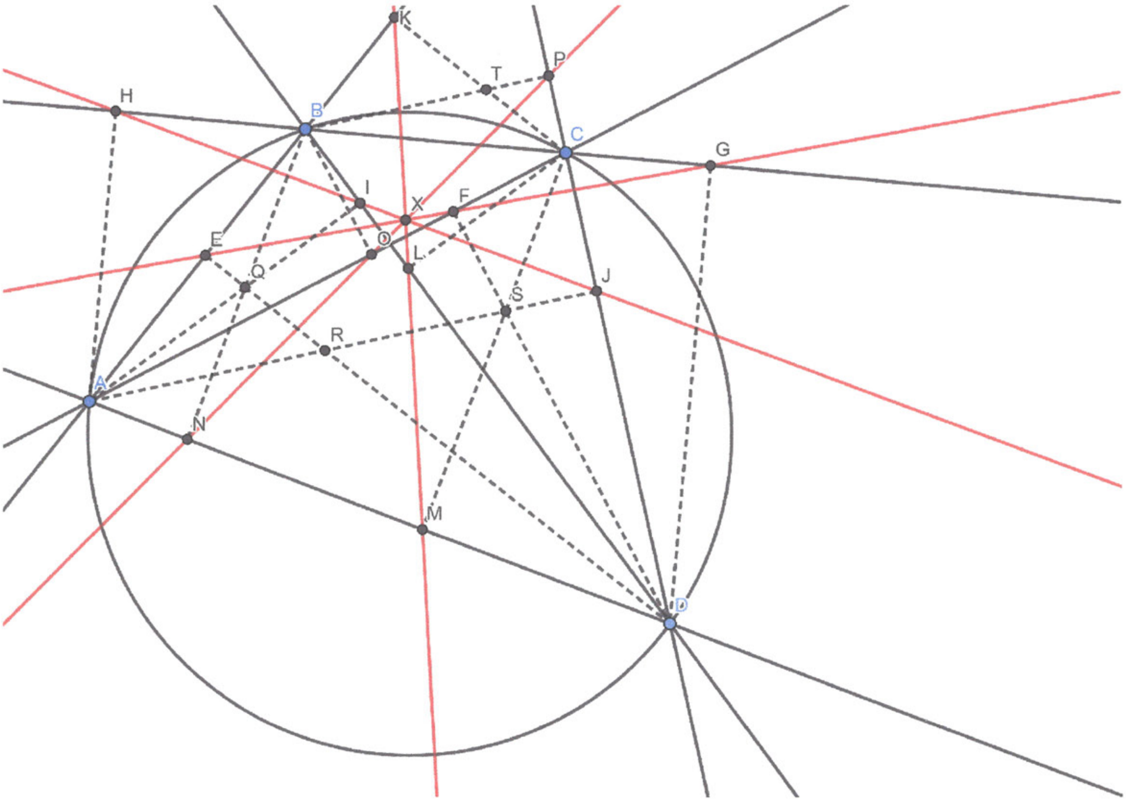
$\angle CAD=\angle GBD=\angle GND$（円周角の定理）

$\Rightarrow AC /\!/ NG$

以上より、三角形 OLF と三角形 NMG において $OF /\!/ NG \quad OL /\!/ NM \quad LF /\!/ MG$ が成立するので、補題 1 より直線 ON,LM,GF は一点で交わる。

同様の考察により、三角形 IOL と三角形 HNM においても上記の関係が成り立つことが分かるので、IH,NO,ML は一点で

交わる。よって 4 つのシムソン線 EG,HJ,KM,NP が高々一点で交わることが示された。 ■



[その他この図における諸性質]

Fact.1

GMNH,FLOI,JPKE は共円で、中心 X を持つ。またこの 3 つは点 X を中心に相似である。

(証明)

GMNH の共円を示す。

LMDC の共円から、∠LMC=∠LDC　ANOB の共円から、∠BNO=∠BAO

ABCD の共円から、∠BAO=∠LDC (円周角の定理)

よって∠BNO=∠LMC であり、∠BNM=∠CMN=90°なので、∠XNM=∠XMN を得る。

以上より、XN=XM がわかる。同様にしていくと XN=XM=XG=XH が従うので、GMNH は X を中心に共円である

他 FLOI,JPKE の共円も同様に成り立つことが分かる。

3 円の中心が一致することから、X を中心に相似であることも容易にわかる。これで示された。 ■

Fact.2

BS,TR,CQ は一点で交わり、交点は X と一致する

以下の事実を証明の際に既知として用いる。

Theorem　シュタイナー(*Steiner*)の定理

三角形 ABC とその外接円上に点 D がある。H を ABC の垂心とするとき、DH の中点は D から ABC に引いたシムソン線上にある。(垂心 H は D から ABC に引いたシュタイナー線上にある)

本論文では、この証明は割愛するが、シュタイナー線と同じく重要な性質である。

(Fact.2 の証明)

BN∩CK=T BN∩AI=Q AJ∩DE=R CM∩AJ=S とする。

シュタイナーの定理より、シムソン線 KM は、CQ を二等分するため、KM と CQ の交点は MN の垂直二等分線上に存在する。

Fact.1 の証明で、XNM が二等辺三角形であることが分かったため、X と KM と CQ の交点は一致。

BS,TR についてもこの議論を繰り返せば、CQ,BS,TR が点 X で交わることが示される。 ■

＊このとき三角形 BQR と三角形 SCT において、補題1のような状況が成り立つことが分かる。

Fact.3

三角形 ABC,BCD,CDA,DAB の9点円は X で交わる

まず前提知識として 9 点円の性質を確認しておく。

Theorem 9 点円(nine point circle)

三角形に対し、以下の 9 点は同一円周上に存在する

三辺の中点、 3 頂点から対辺に下した垂線の足、 垂心と 3 頂点の中点

（証明）

XFJM の共円を示す。

AMJC,AFJD は共円であるから∠CAD＝∠MJD＝∠FJC

よって∠FJM=180°—2∠CAD

また、XL=XF と CFLM の共円から、

∠XFL＝∠XLF＝∠FCM＝90°—∠CAD

よって∠LXF=2∠CAD

以上より∠LXM+∠FJM=180°を得るので示された。

同様にして、IENX、HOXK、GPXL の共円が示されるので、三角形 ABC,BCD,CDA,DAB の9点円は X で交わることが示された。 ■

以上を踏まえると、簡単に次の性質が分かる。

Fact.4

三角形 ABC,BCD,CDA,DAB の9点円の中心は X を中心とする円上に存在する

（略証明）

9 点円は外接円を 1/2 倍に相似拡大したものなので、9 点円の半径は外接円半径の 1/2 倍に等しい。

ABCD は共円なので、三角形 ABC,BCD,CDA,DAB の 9 点円の半径は全て等しい。

Fact.3 から 4 つは X で交わるので、それぞれの中心は X からの距離が等しい

Fact.5

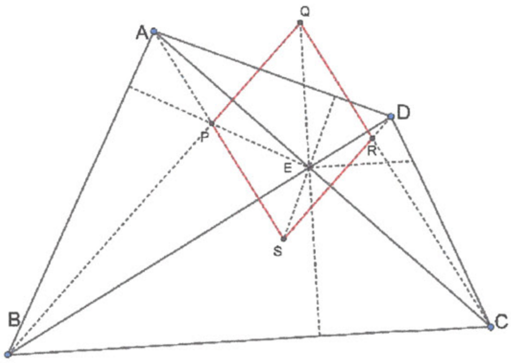
四角形 ABCD の対角線によって分けられる 4 つの四角形の垂心がなす平行四辺形の中心は X に一致する

まず以下の補題を示す。

Lemma 2

凸四角形の対角線によって分けられる 4 つの四角形の垂心は平行四辺形をなす

（証明）



P,Q,R,S をそれぞれ三角形 ABE,BCE,CDE,DAE の垂心とする。

DR⊥AC　DS⊥AC　より、D,R,S は共線。

同様に APS,BPQ,CRQ は共線。

DS⊥AC,BQ⊥AC より PQ∥SR、AS⊥BD、CQ⊥DB より PS∥QR

題意は示された。　■

＊実際これは重心と外心でも成り立つ

（Fact5 の証明）

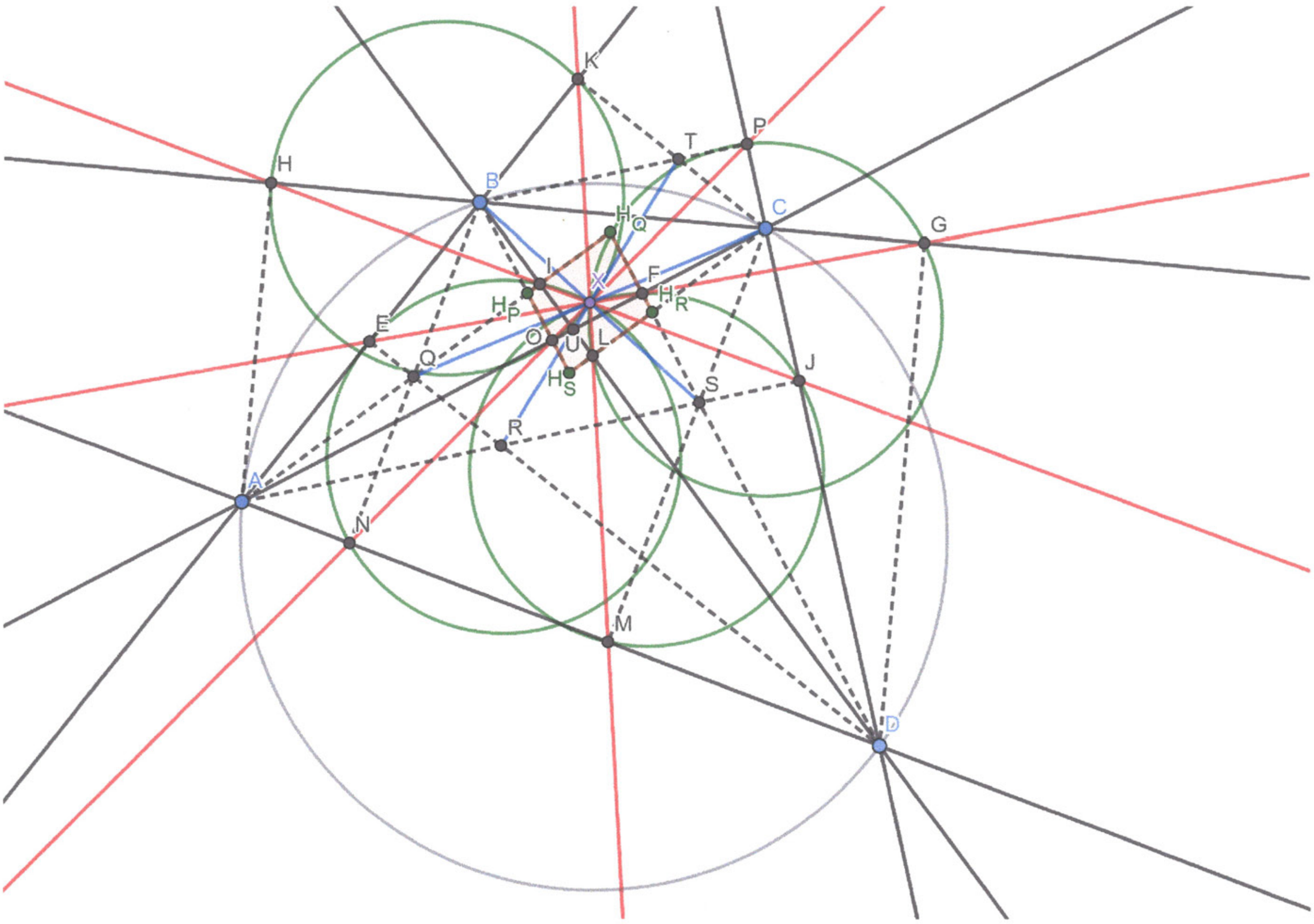
四角形 ABCD の対角線の交点を U、三角形 ABU,BCU,CDU,DAU の垂心をそれぞれ $H_{P\sim S}$ とおく。

BH_S,SH_Q は AC と垂直なので BH_S∥SH_Q であり、同様に QH_Q∥CH_S もわかる。

また、Fact2 の証明から、BCSQ が平行四辺形であることが分かるので SQ∥CB

以上より、三角形 QH_QS と三角形 CH_SB において補題 1 より QC、H_SH_Q,H_PH_R は高々1 点（X）で交わり、2 つの三角形はたがいに合同。よって対称性から $H_PH_QH_RH_S$ の中心は平行四辺形 BCSR の中心 X に一致することがいえる。 よって示された。　■

（全体図）



4.まとめ

今回の論文における点Xは、とても特別な性質を持つ点である。名前を付けてもよいくらいだろう(?)
今後五角形や一般のn角形に拡張することも考えている。

5.研究を終えて(もちろん数学研究に終わりなどない(?))

この性質を発見したのはほんの偶然であった。シムソンの定理について実際に研究するまではあまりなじみもなく、こんな定理が実用性あるのか?と疑問に思っていたのだが、よく考えると図も証明もシンプルで簡単な定理なのだから、拡張できるのではないかと思い、GeoGebra で作図してみることにした。本論文の構図に至った時、最初はあまり期待していなかったのだが、3 本目を引いたとき、「あれ、これ共点なんじゃないか?」と期待。4 本目でそれは確実になった。その瞬間、心拍数が上がる。数学をやる者が 1 度は感じるあの感覚だ。それと同時に、4 本の共点なんてどうやって示すのだろうという疑問もわいた。僕は経験的にも技能的にも未熟で、数学オリンピックなどの問題で、敬遠してしまうような問題も多数ある。しかし、自分で発見した性質ならば、知らない知識を調べてでも絶対に自力で証明してやろうと、研究することを決意した。研究を進めていくうちに、図に平行線が沢山あるということに気づき、補題 1 の存在を思い出した。丁度その時期学校の幾何の授業では、相似拡大を扱っていたのだが、そのときこの問題を一致で証明した。補題1を用いれば、Angle-chase で平行を証明すれば解決することに気づき、4本のシムソン線の共点を証明することができた。しかしそれでは物足りなさを感じ、もっと特殊な性質を探すため、GeoGebra を動かす。また、ネットでシムソンの定理について調べると、シュタイナー線、清宮の定理などの存在も知った。それらの知識も合わせると、Fact1~5 も思いつき、ますます点 X の特殊性が見えてくる。Fact4 以降は論文を書いている最中に思いついた定理なので、今後も進歩があれば論文にまとめようと思う。
そもそも「研究」という形で自分が発見した性質を証明する試みは初めてだ。僕が今までやってきた競技数学や現代数学などは問題が「与えられている」もので、自ら問題を提起して証明することなどは基本的にやったことがない。
今回研究に取り組んで分かったことは、数学の研究は、普通の数学の問題演習とは問題に対する熱意が全く異なる。例えば数学オリンピックの問題であれば、出題者はもちろん、模範解答が存在するわけで、僕が解けたとしても特に特別なことではない。しかし、自分で発見した定理ならば、問題を知っている人は自分以外におらず、模範解答なるものも存在しない。そんな中で地道に解決策を探っていくことは、とても難しい、しかし楽しいことだろう。今回の性質は、世界のどこかでもう証明されているかもしれない。しかし、僕は自分で発見し、自分で解決策を与えることができたことに意味があると考えている。
また、世の中の諸問題は模範解答など存在しない。新しいことにどう対応するかが求められる。そのような意味でも、今回の研究が数学をするものとしての僕を大きく変えたのは確かだ。これからも自分の知的好奇心を最大にして、様々なことに挑戦していきたい。

6.参考文献等

[参考書籍]

『三角形と円の幾何学』 著:安藤 哲哉 発行所:海鳴社

第1刷 発行 2006/10/10

第3刷 発行 2017/7/4

[インターネット]

シムソンの定理とその２通りの証明｜高校数学の美しい物語

https://mathtrain.jp/simson

アクセス日時

2020/08/14/22:55

シュタイナー線、清宮線｜GeoGebra

https://www.geogebra.org/m/sbkNQ6b2#material/UMsBSRdh

アクセス日時

2020/08/15/11:57