ピタゴラス音律と純正律による音の調和の検証

上越市立雄志中学校２年　丸山 優佳

今年の吹奏楽コンクールの県大会では、地区大会のホールより残響時間が長いクラシック専用の音楽ホールで演奏することができました。しかし、演奏しているステージ上ではみんなの音の響きがあまり聞こえず、地区大会よりも音楽が１つになるような演奏ができなかったような気がして少し残念でした。うなりのない音を作ることでホールいっぱいに美しく響かせることができると聞き、美しい響きを作るためには何が必要なのか検証しました。美しい旋律の音律と和音の音律が調和する音の世界を示します。

1　はじめに

モーツァルトの人生を描いた映画「アマデウス」では、ライバル心を抱くサリエリが、モーツァルト夫人であるコンスタンツェからモーツァルトが書き下ろしたままのオリジナル楽譜を見てほしい、と手渡される場面があります。サリエリはモーツァルトの才能と、あまりの曲の美しさに衝撃を受け、思わず楽譜を手から落としてしまいます。そのシーンの一番最初に流れる曲が、「フルートとハープのための協奏曲」第２楽章です。世界で最も美しいとされる曲の１つとも言われます。

この曲の楽譜を見ると第２楽章はヘ長調で書かれ、弦楽器による前奏の後、フルートとハープのソリ（複数人での旋律演奏）が始まります。１小節目はフルートの旋律がヘ長調の主音ファの３度上のラを３回、ハープはファ・ラ・ドのヘ長調の主和音をフルートと同時に３回演奏され曲が進んでいきます。

ソリの１小節目の旋律と和音の音の響きについて疑問に思い、この研究では振り子の単振動の実験で音の調和を検証しました。最も美しいとされる曲であっても、演奏によっては音の響きが悪くなってしまいます。どこに不協和となる原因が隠されているのか、どのように演奏すると３度の旋律と和音を調和させることができるのか。楽譜がシンプルで一見簡単そうに見える曲であっても、澄んだ響きで演奏することの難しさと、美しく調和させる秘密を数学を通して検証していきます。

2　研究の背景

フルートは１つの運指で４つの音を出すことができます。例えば、１オクターブ目のラを出す指使いのまま、歌口に吹き込む息のスピードをコントロールすることで、２オクターブ目のラ、３オクターブ目のミ、３オクターブ目のラの音を出すことができます。ただし、３オクターブ目は低音域より息のスピードが速くなるため、音程や音色の調整のために少し指使いが変わります。ですが、基本的には基音のラの指使いで様々な倍音を出すことができます。

管楽器はこのように基音の指使いで３オクターブの音域を倍音を使って出すことができます。その仕組みを不思議に思い、昨年音に関する科学研究をしました。しかし、「ボイド管」の気柱の端を叩いて音を出す実験方法では倍音を作ることができないことから、倍音の研究は今年の課題になりました。

倍音の研究はできませんでしたが、音律と調和に関する実験の中で「美しく響く音」にはとても整った規則性があることが分かりました [1]。今年はさらにその一定の規則の中で起こる不協和について研究してみようと思い、春休みに振り子を使った実験を始めました。ところが、実験データを見ていると、とても面白い数学の定理が表れたので驚き、音楽と物理と数学をつないでいる、目には見えない法則を明らかにしてみたいと思い研究を進めました。

まず、去年の研究結果を簡単に紹介します。

2.1　3 つの音律と音階

気温 25 ℃のときの音速から、A（ラ）= 442 Hz のときの波長を計算し、音階を作りました。平均律はピタゴラス音律と純正律のドを基準にして計算しました。

図 1: 3 つの音律のハ長調の音階

2.1.1　ピタゴラス音律の音階

音が協和する完全 5 度の波長の比 3 : 2 を計算しました。開口端補正をした気柱でピタゴラス音律のハ長調の音階を作りました。

表 1: ピタゴラス音律のハ長調の音階

音	周波数比	周波数 (Hz)	波長 (cm)	補正値 (cm)	気柱の長さ (cm)
ド	1	261.93	132.3	4.0	128.3
レ	9 / 8	294.66	117.6	4.0	113.6
ミ	81 / 64	331.50	104.5	4.0	100.5
ファ	4 / 3	349.23	99.2	4.0	95.2
ソ	3 / 2	392.89	88.2	4.0	84.2
ラ	27 / 16	442.00	78.4	4.0	74.4
シ	243 / 128	497.25	69.7	4.0	65.7
ド	2	523.86	66.1	4.0	62.1

隣り合う音の周波数比は、

全音　9 / 8（=1.125）
半音　256 / 243（=1.0534... 狭い半音リンマ）

- 全音と半音は、それぞれ隣り合う音の周波数比が一定になり、自然な音の並びになりました。
- 全音はのびやかに、半音は緊張感のある音程で、ふわっと音が浮かんでいくように聞こえました。
- 8 音の中に、完全 5 度がドとソ、レとラ、ミとシ、ファとドの 4 組ありました。
- ピタゴラス音律の音階は周波数比が 2 : 3 という小さな整数比の 2 音を組み合わせた 8 音でできていました。

2.1.2　純正律の音階

ピタゴラス音律の 3 度の音程を美しく響かせるために工夫をしたのが純正律です。ピタゴラス音律のミとラとシ（主要 3 和音の 3 度の音程）を修正し、音階を作りました。

隣り合う音の周波数比は、

全音　9 / 8（=1.125 ドとレ、ファとソ、ラとシ）と、10 / 9（=1.1111... 狭い全音 レとミ、ソとラ）の 2 種類
半音　16 / 15（=1.0666...）

- でこぼこした不自然な音階になりました。
- 完全 5 度は、ドとソ、ミとシ、ファとドの 3 組ありますが、隣り合う音に 2 種類の異なる周波数比の全音があるため、自然なメロディーを作ることができないことが分かりました。

2.1.3 平均律の音階

平均律は隣り合うすべての音の「周波数比が一定」というとてもシンプルな音律です。12 音のすべての周波数比を掛け合わせると 2 になります。指数関数は関数電卓で値を求め、平均律の音階を作りました。

隣り合う音の周波数比は、

全音 $2^{\frac{2}{12}}$（=1.1224...）
半音 $2^{\frac{1}{12}}$（=1.0594...）

- ピアノ、キーボード、木琴などでいつも聞いている音階になりました。
- 隣り合う音の周波数比が一定なので、なめらかに聞こえますが、ピタゴラス音律の音階に比べると音が浮かんでいくようには聞こえません。
- オクターブを除く 2 音の比率が整数比になりません。
- 等比数列で完全に均等に分割していますが、5 度の音程が低く、どの音とも完全には協和していません。
- 平均律は響き合う音という理想がなくなりました。

音階は隣り合う音の周波数比が一定であることと、協和している完全 5 度を組み合わせた音階であることの 2 つの条件に当てはまるときに最も美しく聞こえることが分かりました。

2.2 3 つの音律と和音

主和音・下属和音・属和音は「主要 3 和音」とよばれ、音楽の中でとても重要な役割をしています。ピタゴラス音律、純正律、平均律のハ長調の和音を作りました。

2.2.1 ピタゴラス音律の和音

重なり合う 2 音の周波数比は、

根音と第 3 音 81 / 64（=1.2656... ドとミ、ファとラ、ソとシ）
第 3 音と第 5 音 32 / 27（=1.1851... ミとソ、ラとド、シとレ）

- 3 度の音程がとても高く聞こえました。
- 気柱の響きがすぐに消えました。
- 重なり合う 2 音の周波数比が大きな整数の比でできていて、複雑になっていました。
- 根音と第 5 音は完全 5 度で協和していますが、第 3 音が協和しないため美しい和音にならないことが分かりました。

2.2.2 純正律の和音

表 2: 純正律のハ長調の和音

和音	音	周波数比	周波数 (Hz)	波長 (cm)	補正値 (cm)	気柱の長さ (cm)
主和音	ド	1	261.93	132.3	4.0	128.3
	ミ	5 / 4	327.14	105.8	4.0	101.8
	ソ	3 / 2	392.89	88.2	4.0	84.2
下属和音	ファ	4 / 3	349.23	99.2	4.0	95.2
	ラ	5 / 3	436.55	79.4	4.0	75.4
	ド	2	523.86	66.1	4.0	62.1
属和音	ソ	3 / 2	392.89	88.2	4.0	84.2
	シ	15 / 8	491.11	70.6	4.0	66.6
	レ	9 / 4	589.34	58.8	4.0	54.8

重なり合う 2 音の周波数比は、

根音と第 3 音　5 / 4（=1.25 ドとミ、ファとラ、ソとシ）
第 3 音と第 5 音　6 / 5（=1.2 ミとソ、ラとド、シとレ）

- 3 度の音程が低く、美しく深い響きの和音になりました。
- 気柱の響きが長く残りました。
- 重なり合う 2 音の周波数比が小さな整数の比でできていました。
- ピタゴラス音律の 3 度の音程を修正した音律であることが分かりました。

図 2: 3 つの音律のハ長調の和音

2.2.3　平均律の和音

重なり合う 2 音の周波数比は、

根音と第 3 音　$2^{\frac{4}{12}}$（=1.2599... ドとミ、ファとラ、ソとシ）
第 3 音と第 5 音　$2^{\frac{3}{12}}$（=1.1892... ミとソ、ラとド、シとレ）

- 3 度の音程が高く聞こえました。
- 普段ピアノで聞くことができる和音になりました。
- 気柱の響きがすぐに消えました。
- 重なり合う 2 音の周波数比が整数比にならず、複雑になっていました。
- 等比数列で完全に均等に分割していますが、どの音とも協和しないので和音に濁りがありました。
- 平均律は響き合う和音を奏でることができません。

重なり合う音の周波数比が小さな整数の比でできているときに、最も美しい和音に聞こえることが分かりました。
気柱を使った音律の実験から分かる「美しく響く音」は、

旋律の音律　隣り合う音の周波数比が一定で、最も協和する 2 ： 3 の周波数比からできた音律とき。
和音の音律　重なり合う音の振動の波の周期が一致しているとき。

と導くことができ、音は「純正律の和音に乗って、ピタゴラス音律の旋律が奏でられるとき最も美しい」という結論を得ることができました。

3　実験材料と方法

音の振動はとても速いので目で見て確認することができません。そこで、管楽器の演奏者は普段チューナーを使って音程を確認しています（チューナーが 1 秒間の振動数を測り、音の高さと音程のずれを示してくれます）。しかし、普段使っている平均律チューナーでは音の調和までは測定することができないため、実験でゆっくりとした振動を再現し、音の調和を確認することはできないだろうか、と考えました。

小学校の理科で振り子の実験をしましたが、振り子の動きはゆっくりで一定の動きを繰り返しています。鯉沼拓著『宇宙一わかりやすい高校物理』を見ると、「振れる角度が小さいとき、横方向のみの振動とみなせる」と書かれています [2]。音の振動を振り子の単振動とみなすことで、音の調和の法則を確かめられるのではないかと考えました。

おもり　振り子の長さは、固定の位置からおもりの中心までの距離。
糸　最初に糸をおもりに結びつけ、必要なふりこの長さを正確に測る。

図 3: おもりと糸

4 結果

4.1 音の調和と振り子の単振動

4.1.1 振り子の長さの計算

振り子は、周期（1 往復する時間）が 2 倍になると、振り子の長さは $2^2 = 4$ 倍。周期が 3 倍になると、振り子の長さは $3^2 = 9$ 倍になることが知られています。

ドの周波数比を 1 とすると、1 オクターブ上のドの周波数比は 2 です。1 オクターブ上のドの波長は周波数比の逆数 1 / 2 になり、振り子の長さは、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

周波数比 1 のドの振り子の長さを 1 m とすると、1 オクターブ上のドは 1 / 4 の 25 cm と計算することができます。

このように、波長を 2 乗することで振り子の長さが求められることが分かります。同じように計算して、ドと完全 5 度で調和するソを計算します。ミは、ピタゴラス音律、純正律、平均律の 3 種類の振り子の長さを計算しました。

表 3: 調和するド・ソと 3 つの音律のミ

音	音律	周波数比	波長の比	振り子の長さ (m)	(cm)
ド		1	1	1	100.0
ミ	純正律	5 / 4	4 / 5	$4^2/5^2$	64.0
ミ	平均律	$2^{\frac{4}{12}}$	$1/2^{\frac{4}{12}}$	$1/(2^{\frac{4}{12}})^2$	63.0
ミ	ピタゴラス音律	81 / 64	64 / 81	$64^2/81^2$	62.4
ソ		3 / 2	2 / 3	$2^2/3^2$	44.4
ド		2	1 / 2	$1/2^2$	25.0

ドが 1 往復するあいだ、1 オクターブ上のドの振り子は 2 往復し、1 : 2 で振動する振り子ができました。また、ドが 2 往復するあいだ、ソが 3 往復し、2 : 3 の振り子ができました。

3 つの音律のミの中でドと調和する振り子は純正律となり、4 : 5 の振り子ができました。残りの 2 つは純正律のミより少し速く振動するので、ドと調和することができませんでした。

ド：純正律のミ：ソ：1 オクターブ上のド = 4 : 5 : 6 : 8

約 3 分間調和して振動することが、振り子の実験で確かめることができました。

図 4: 3 つのミ、ソ、ド

4.1.2 調和する振り子から考える「フルートとハープのための協奏曲」

モーツァルトの「フルートとハープのための協奏曲」第 2 楽章 [3] では、フルートは主音ファの 3 度上の旋律ラを演奏し、ハープは主和音を奏でています。フルートは息の角度や、唇への楽器の当て方で音程を自在に変化させることができる楽器です。一方ハープは 1 台の楽器で旋律、和音の両方を演奏し、調律は頻繁には変えることができないことから、平均律で調律しています。

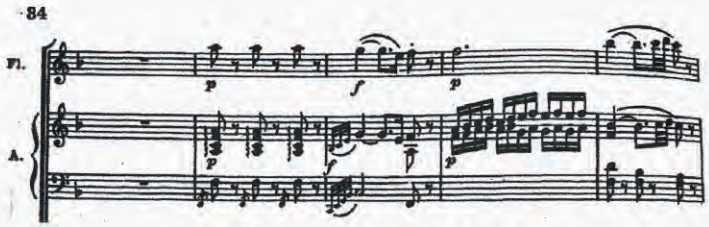

図 5: フルートとハープのソリの冒頭

表 1 の「ピタゴラス音律のハ長調の音階」より、旋律はピタゴラス音律が 1 番美しいことから、フルートはヘ長調のピタゴラス音律の旋律を演奏していると考えることができます。振り子のミでは、ピタゴラス音律のミは平均律のミより少し早くおもりが進みます。3 分間のおもりの動きを見ていると、ずれがだんだんと大きくなり、振り子の波が打ち消し合うようにおもりが反対の方向になるときがあります。ボイド管で作ったハ長調の第 3 音のミを見ると、ピタゴラス音律と平均律は、

$$331.50\ \mathrm{Hz} - 330.03\ \mathrm{Hz} = 1.47\ \text{回 / 秒}$$

1 秒間に約 1.5 回のうなりが発生してしまいます。

しかし、楽譜の音の長さは八分音符で短く、音量は p のため、音のうなりは気にならないのかもしれません。フルートのラの音程をハープに合わせてしまうと、ピタゴラス音律の規則性が崩れしまい、その後に続くソ、ミ、ファの旋律の美しさが損なわれてしまいます。和音となるハープの音を小さくすることで音のバランスを取るのかもしれません。

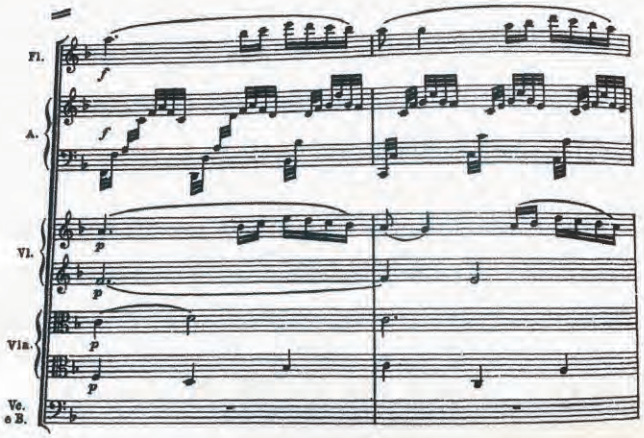

図 6: 弦楽器の和音とフルートの旋律

曲の続きを見ていくとラの旋律に弦楽器の主和音が入ってきます。弦楽器は音程を自在に変えることができます。うなりのない澄んだ和音にするには、純正律であることが分かります。この場合はレガートで演奏するので、フルートが第 3 音をピタゴラス音律で演奏すると、音のうなりが聞こえてくるはずです。

振り子のピタゴラス音律のミと純正律のミのおもりを見てみると、時間とともにずれがだんだん大きくなります。

$$331.50\ \mathrm{Hz} - 327.14\ \mathrm{Hz} = 4.36\ \text{回 / 秒}$$

ボイド管のハ長調のミでは、1 秒間に約 4 回のうなりが発生してしまいます。これでは美しい音楽をつくることはできません。うなりのない旋律と和音を演奏するには、音程の取り方を工夫する必要がありそうです。

4.2 フルートの倍音

4.2.1 ラの音を FFT アナライザで測定する

トランスナショナル・カレッジ・オブ・レックス著『フーリエの冒険』[4] では、音と「フーリエ」という波の解析について詳しく解説されています。音の波のグラフから、波の成分（音の高さと量）を一目で分かるようにしたのがスペクトルです。何 Hz の波がどれくらい入っているのか見ることができます。

iPad のアプリ「e-scope 3-in-1」には、FFT アナライザとオシロスコープの機能があります。これは、空気の振動をそのまま圧力の変化としてグラフで見ることができたり、フーリエ展開をしてくれるアプリです。

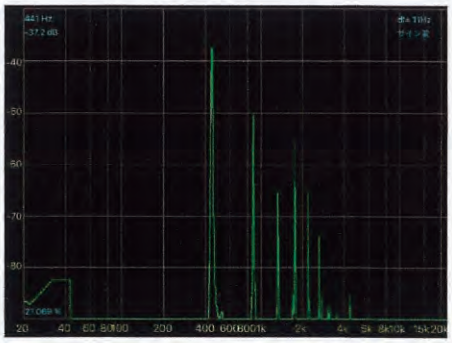

図 7: フルートのラのスペクトル

フルートの音の成分を見てみると、図 7 のようになりました。スペクトルを見ると、ラの音の中には同時にいくつもの倍音が含まれています。フルートは息を吹き込む歌口の部分と足部管に 2 つの開口端がある筒状の楽器です。両端が自由端になる波は整数倍になることが、図 7 から分かります。1 つの指使いで、整数倍の倍音を息のコントロールだけで吹き分けることができる理由が分かりました。

4.2.2 フルートの倍音から振り子の長さを計算する

表 3 の「調和するド・ソと 3 つの音律のミ」の振り子の実験はハ長調で行ったので、ドを基準として倍音と振り子の長さを計算しました。

表 4: フルートのドの倍音

倍音	音	周波数比	波長の比	振り子の長さ (m)	(cm)
基音	ド	1	1	1	100.0
第 2 倍音	ド	2	1 / 2	$1/2^2$	25.0
第 3 倍音	ソ	3	1 / 3	$1/3^2$	11.1
第 4 倍音	ド	4	1 / 4	$1/4^2$	6.3
第 5 倍音	ミ	5	1 / 5	$1/5^2$	4.0
第 6 倍音	ソ	6	1 / 6	$1/6^2$	2.8
第 7 倍音	(シ♭)	7	1 / 7	$1/7^2$	2.0
第 8 倍音	ド	8	1 / 8	$1/8^2$	1.6
第 9 倍音	レ	9	1 / 9	$1/9^2$	1.2
第 10 倍音	ミ	10	1 / 10	$1/10^2$	1.0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
総和		∞	$\zeta(1) = \infty$	$\zeta(2) = \pi^2/6$	164.4934 ⋯

結城浩著『数学ガール』[5] の「ハーモニック・ナンバー」と「テイラー展開とバーゼル問題」の章と同じ式が表れたので驚きました。「ミルカさんのカード」のゼータ関数 $\zeta(1)$ と $\zeta(2)$ です。

振り子の長さの総和の値は、森田繁一著『岩波 数学公式 II』[6] を参考にしました。

ドの倍音に表れる音は、ドと調和する純正律になります。とてもきれいな数字の並びになりました。波長の比の値を無限に足していくことを調和級数といいますが、「調和」とよばれる理由がよく分かります。

4.2.3 ゼータ関数　調和級数とバーゼル問題

小島寛之著『世界は 2 乗でできている』[7] の「オイラーとリーマン」の章には、ゼータ関数に関する数学の物語が書かれています。バーゼル問題は、18 世紀の数学者の間で熱心に研究された「平方数の逆数を無限に足したらいくつになるか」という問題です。オイラーは 20 桁まで計算し、その値が $\pi^2/6$ と突き止めましたが、その証明には、さらに 10 年の歳月が必要だったそうです。

表 4「フルートのドの倍音」を見ると、波長の比の総和は調和級数となり無限大です。もしドの音に無限の倍音が含まれているとすると、無限の長さの波長の和がドの音を出すフルートの中に発生している、と考えることができるということでしょうか。

一方、振り子の長さの総和は、オイラーのバーゼル問題の値の $\pi^2/6 = 1.644...$ となります。倍音の振り子を無限に作り続けたとしても、振り子の長さの総和はわずか 1 m 65 cm となります。裁縫箱の中の少しの糸だけで、無限に倍音の振り子を作ることができるというのは不思議な感じがします。

4.3 ピタゴラス音律と純正律の音の調和

4.3.1 ハ長調の旋律 7 音に対応する主要 3 和音

菊池有恒著『楽典』[8] によると、「三和音とは、ある音の上に 2 つの音を 3 度の音程間隔で重ねたもの」です。主要三和音が旋律の中にどう表れてくるのか考えました。

ハ長調のド・ミ・ソの和音を I 度和音（主和音）、ファ・ラ・ドの和音を IV 度和音（下属和音）、ソ・シ・レの和音を V 度和音（属和音）ということから、表の中で I、IV、V と表すことにします。曲の中ではこの 3 つの和音が主に使われるため主要 3 和音とよばれます。雄志中学校の校歌では 9 割で主要 3 和音が使われています [1]。

ローマ数字の後ろの数字については、根音、第 3 音、第 5 音を表します。例えば I 度和音（主和音）のドは根音なので、「I - 1」、ミは第 3 音で「I - 3」、ソは第 5 音で「I - 5」と表すことにします。

表 5: ハ長調の旋律に対応する主要 3 和音

	和音	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ
旋律	ド	I -1		I - 3		I - 5		
	ド	IV - 5			IV - 1		IV - 3	
	レ		V - 5			V - 1		V - 3
	ミ	I - 1		I - 3		I - 5		
	ファ	IV - 5			IV - 1		IV - 3	
	ソ		V - 5			V - 1		V - 3
	ソ	I - 1		I - 3		I - 5		
	ラ	IV - 5			IV - 1		IV - 3	
	シ		V - 5			V - 1		V - 3

ピタゴラス音律で旋律を演奏する場合、旋律の音程と純正律の和音の音程が合わない所が 3 か所あることが分かります。ミ・ラ・シはピタゴラス音律をもとに、純正律の和音を作るときに修正した 3 度の音です。和音にうなりが出ないように、旋律の音程を純正律に合わせると、ピタゴラス音律の規則性が崩れてしまうので、旋律の音程は動かすことはできません。

では、どのようにうなりが出ないようにすればいいのでしょうか。

4.3.2 ピタゴラス音律の旋律に対応する純正律

図 7 の「フルートのラのスペクトル」と表 4 の「フルートのドの倍音」を見ると、フルートの 1 音には必ず整数倍の倍音が含まれていることが分かります。他の管楽器を考えてみると、気柱の片方が閉じられた閉管は奇数倍の倍音になりますが、やはり規則正しく倍音が含まれています。

音楽の中でも同じように、ピタゴラス音律で演奏する旋律の音程に対して、純正になる和音を合わせることで、旋律の倍音に含まれている音を演奏することになり、うなりがなくなると考えることができます。ピタゴラス音律のハ長調の旋律ミ・ラ・シの場合、和音の根音と第 5 音は、ピタゴラス音律に対して純正にとるということを意味します。

つまり、旋律のピタゴラス音律は曲の調の主音（ハ長調はド、ヘ長調はファ）に対して確定された音程が決まるのに対して、純正律の和音はピタゴラス音律に対して純正なうなりのない和音を選択するということになります。

これは、ハ長調に限らずどの調にも、また長調や短調のどちらにも同じ法則が成り立つといえます。主音に対して旋律はピタゴラス音律、和音はピタゴラス音律に対して純正律に演奏することで、にごりのない澄んだ音を作ることができると分かります。

5 考察

古澤明著『量子もつれとは何か』[9] の「量子テレポーテーション」の章にアリスとボブのたとえが出てきます。「アリスが持っている量子の状態を、受信者ボブの量子で再現する」という表現がぴったりだなと思いました。音楽でいうと、アリスの旋律の音の情報を、ボブの和音のところで同時に再現することにつながるからです。

基本はハ長調のピタゴラス音律の旋律には表 2 の「純正律のハ長調の和音」が調和していますが、不協和になる特異点となる音（アリスのミ・ラ・シ）があり、和音とのずれがあります。もしもボブが純正律で調律したハープを持っているとすると、特定の組み合わせに対応したもう 1 台のハープが必要になります。

表 6: アリスのミ・ラ・シのためのボブの 2 台目のハープ

和音	音	周波数比	周波数 (Hz)	波長 (cm)	振り子の長さ (m)	(cm)
主和音	ド	81 / 80	265.20	130.6	$80^2/81^2$	97.5
	ミ	81 / 64	331.50	104.5	$64^2/81^2$	62.4
	ソ	243 / 160	397.80	87.1	$160^2/243^2$	43.4
下属和音	ファ	27 / 20	353.60	98.0	$20^2/27^2$	54.9
	ラ	27 / 16	442.00	78.4	$16^2/27^2$	35.1
	ド	81 / 40	530.40	65.3	$40^2/81^2$	24.4
属和音	ソ	243 / 160	397.80	87.1	$160^2/243^2$	43.4
	シ	243 / 128	497.25	69.7	$128^2/243^2$	27.7
	レ	729 / 320	597.70	58.1	$320^2/729^2$	19.3

ボブの 2 台目のハープのそれぞれの和音の第 3 音（アリスのミ・ラ・シ）はピタゴラス音律と同じ周波数です。

根音 : 第 3 音 : 第 5 音 = 4 : 5 : 6

となるように、ボブの根音、第 5 音を計算しました。表 2 の基本の純正律より、それぞれ 81 / 80 ずつ音が高くなりました。

このように、和音を修正することで澄んだ響きを得ることができると考えられます。旋律であるピタゴラス音律は、主音に対して確定された 1 つの構造を持ちますが、和音は選択性があることになります。基本の純正律と、旋律が第 3 音、第 6 音、導音（アリスのミ・ラ・シ）のための純正律、という 2 つの構造になっているのではないかと考えることができます。

6 おわりに

6.1 結論

モーツァルトの「フルートとハープのための協奏曲」第 2 楽章では、フルートの旋律に合わせて弦楽器の和音が音程を修正していると考えることができます。旋律に和音を調和させることで、図 8 のようにピタゴラス音律の 1 音に、純正律の 3 つの音のいずれかが重なって 3 つの波となり、さらにまとまって 1 つの周期となり、どこまでも波が崩れることなく繰り返されているということが分かりました。

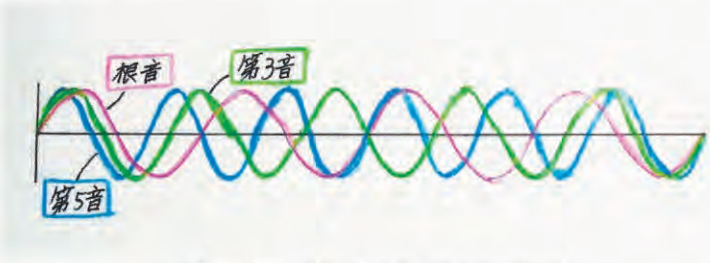

図 8: 純正律の根音・第 3 音・第 5 音の音の波

第 3 音、第 6 音、導音（アリスのミ・ラ・シ）が伸ばす音のとき、旋律を演奏する人がよく悩むのは音程についてだと思います。気を付けなければならないのは、旋律の美しさは修正のない純正律とは調和しない時があることです。

基本の純正律を「ボブI」、ピタゴラス音律のミ・ラ・シに対応した純正律を「ボブII」とすると、表7のようになります。

表7: 主要3和音の中のアリスの位置とボブの音程（ハ長調）

	アリスの音	根音		第3音		第5音	
基本の純正律	ド・ファ・ソ	アリス	ボブI	—	ボブI	—	ボブI
アリスのための純正律	ミ・ラ・シ	—	ボブII	アリス	ボブII	—	ボブII
基本の純正律	ソ・ド・レ	—	ボブI	—	ボブI	アリス	ボブI

美しい音楽には美しい音律の旋律で、美しい旋律には美しい和音を添えて演奏することで、音がのびやかで、濁りのない澄んだ響きを作ることができるのだと分かりました。

6.2 今後の課題

カンタービレやドルチェやカデンツァの楽譜の指示は、旋律の美しさを表現することが多いですが、チューナーのゼロの表示に合わせた音は美しいとはいえません。また、ハーモニーは3度の音程を修正した純正律の練習をしますが、旋律に対してうなりが出ないようにしなければ、よい音楽は作れません。

旋律の第3音、第6音、導音（アリスのミ・ラ・シ）に対する和音の音程を修正した方がよい、とすると疑問に感じる人が多いと思います。なぜなら、チューナーには3度の音程のところに印がついているため、3度を「長調では低く、短調では高く」と固定された音程と考える人が多いからです。

吹奏楽は何年も楽器の演奏の練習をしますが、主に練習するのはボブIの和音です。しかし、音のつながりの美しさがなければ音楽の楽しさや美しさは半減してしまいます。よい演奏のために、楽譜を読んで分析することが必要だと思いました。

ピタゴラス音律を昔の時代の音程と切り捨てずに、究極の美しさを持つ音律として大切にしていきたいです。

6.3 感想

去年、ボイド管の気柱を使ってピタゴラス音律を作る実験から研究を始めました。

ファインマンは『ファインマン物理学II』の中で次のように語っています[10]。

> なぜある音だけが耳に気もちよくひびくかということを理解する点で、われわれはピタゴラスよりすこしはましになっているかどうかを知りたいのである。美学の一般理論はおそらく現在ピタゴラスの時代よりあまり進歩していないのであろう。

分からないことを調べていくと、シュウィンガーの開口端補正の論文、ガリレオの振り子の等時性、オレームやベルヌーイの調和級数、オイラーのバーゼル問題の研究に出会いました。色々な物理や数学の本にも出会いました。

古代ギリシャのピタゴラスの時代から研究されてきた音律の問題ですが、美しく調和する音楽について奏法の研究からではなく、物理の簡単な実験と数学から検証できるところが面白いなと思いました。

参考文献

[1] 第56回新潟県児童生徒科学研究発表会『わたしたちの科学研究 第56集』新潟日報社、2021年
[2] 鯉沼拓『宇宙一わかりやすい高校物理（力学・波動）』学研プラス、2020年
[3] モーツァルト『フルートとハープのための協奏曲』全音楽譜出版社、2006年
[4] トランスナショナル・カレッジ・オブ・レックス『フーリエの冒険』ヒッポファミリークラブ、1990年
[5] 結城浩『数学ガール』ソフトバンククリエイティブ、2009年
[6] 森口繁一、宇田川銈久、一松信『岩波 数学公式II』岩波書店、2008年
[7] 小島寛之『世界は2乗でできている』講談社ブルーバックス、2013年
[8] 菊池有恒『楽典 音楽家を志す人のための 新版』音楽之友社、2008年
[9] 古澤明『量子もつれとは何か』講談社ブルーバックス、2020年
[10] ファインマン、レイトン、サンズ『ファインマン物理学II』岩波書店、2001年

図9: バラ「コンスタンツェ モーツァルト」と